8.2 Suites arithmétiques, suites géométriques

Les suites géométriques ont une importance capitale dans le cours de mathématiques

8.2.1 Définition

On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique, si $u_n = u_{n-1} + r$ et $u_0 = a$

- **r est la raison de cette suite.**
- **Il est équivalent de dire que $u_n - u_{n-1} = r$ pour tout $n \in \mathbb{N}$**

Remarque 2 :

1. Il est bien évident que l'on peut définir un premier terme à cette suite, ailleurs qu'en $n = 0$; on peut définir comme premier terme $u_{n_0} = a$ où n_0 est le plus petit élément de I
2. On dit que des nombres réels a, b, c sont en **progression arithmétique** si $b - a = c - b$ ou encore, que $b = \dfrac{a+c}{2}$

8.2.2 Proposition

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique.
$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique si et seulement si $\boxed{2u_n = u_{n-1} + u_{n+1}\,(P)}$

Remarque 3 :

Ceci veut donc dire qu'il y a équivalence entre le fait que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit une suite arithmétique et que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la propriété (P)

Démonstration

Cette proposition est une équivalence ; il faut donc faire la démonstration *"dans les deux sens"*.

- On suppose $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$suite arithmétique.
  Alors, $u_{n+1} = u_n + r$ et $u_n = u_{n-1} + r$, c'est à dire que $r = u_{n+1} - u_n = u_n - u_{n-1}$; C'est à dire, en transposant, $2u_n = u_{n-1} + u_{n+1}$
- On suppose $2u_n = u_{n-1} + u_{n+1}$
  Ceci veut donc dire que $u_n + u_n = u_{n+1} + u_{n-1}$ ou, ce qui est équivalent à $u_{n+1} - u_n = u_n - u_{n-1}$
  Ce qui veut donc dire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique

Remarque 4 :

Remarquez **comment** nous avons démontré une équivalence.

8.2.3 Expression de u_n en fonction de n

1. **Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r. Alors**
$$(\forall n \in \mathbb{N})\,(\forall p \in \mathbb{N})\,(p \leqslant n) \Rightarrow (u_n = u_p + (n-p)\,r)$$
   En particulier, on a $\boxed{u_n = u_0 + nr}$
2. $(\forall n \in \mathbb{N})\,(\forall p \in \mathbb{N})\,(p \leqslant n)$ **et** $(0 \leq k \leq n-p) \Rightarrow (u_{n-k} + u_{p+k} = u_n + u_p)$

Démonstration

1. On démontre le premier point par récurrence sur n

   Vérifions pour le premier terme u_p Nous avons, effectivement $u_p = u_p + (p-p)\,r$

   Supposons que pour $n \geqslant p$**,** $u_n = u_p + (n-p)\,r$

   Démontrons à l'ordre $n+1$ Nous avons $u_{n+1} = u_n + r = u_p + (n-p)\,r + r = u_p + (n+1-p)\,r$
   Ce que nous voulions
2. Pour le second point, il suffit de réutiliser le point juste au-dessus :

$$\begin{aligned} u_{n-k} + u_{p+k} &= u_p + (n-k-p)\,r + u_p + u_p + (p+k-p) \\ &= u_p + (n-p)\,r - kr + u_p + kr \\ &= u_n + u_k \end{aligned}$$

Remarque 5 :

1. Il faut remarquer que les suites arithmétiques sont donc les restrictions sur $\mathbb{N}$ des applications affines du type $f(x) = ax + b$
2. On vient de démontrer que les suites sont arithmétiques **si et seulement si** elles sont du type $u_n = an + b$.

8.2.4 Somme des termes d'une suite arithmétique

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $p \leqslant n$. On pose $S_{p,n} = \sum_{k=p}^{n} u_k = u_p + u_{p+1} + \cdots + u_n$.

Alors $S_{p,n} = \dfrac{(n-p+1)(u_p + u_n)}{2}$

On a, en particulier, $\boxed{S_{0,n} = S_n = \dfrac{(n+1)(u_0 + u_n)}{2}}$

Démonstration

On écrit $S_{p,n}$ de 2 manières différentes et, de plus, on compte le nombre de termes formant la somme des $S_{p,n}$

$$\begin{cases} S_{p,n} = & u_p + u_{p+1} + \cdots + u_{n-1} + u_n \\ S_{p,n} = & u_n + u_{n-1} + \cdots + u_{p+1} + u_p \end{cases}$$

En faisant remarquer que *(cf supra 2)* que $u_{n-k} + u_{p+k} = u_n + u_p$ on obtient alors, en additionnant, $2S_{p,n} = (n-p+1)\,(u_n + u_p)$ D'où le résultat

Exercice 3 :

1. Calculer la somme des n premiers nombres entiers

   Il suffit de remarquer que la suite des entiers est une suite arithmétique de premier terme $u_1 = 1$ et de raison $r = 1$. Donc, $S_n = \sum_{k=1}^{n} k$ est donnée par :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{(n-1+1)(u_1 + u_n)}{2} = \frac{n(1+n)}{2}$$

2. Calculer la somme des n premiers nombres impairs

   Comme tout à l'heure, il suffit de remarquer que la suite des entiers impairs est une suite arithmétique de premier terme $u_0 = 1$ et de raison $r = 2$. Les entiers impairs s'écrivent $u_k = 2k+1$. Donc, $S_n = \sum_{k=0}^{n} 2k+1$ est donnée par :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} 2k+1 = \frac{(n-0+1)(1+2n+1)}{2} = (n+1)^2$$

3. Calculer la somme des n premiers multiples de 5

Les entiers multiples de 5 s'écrivent $5k$, et la somme des n premiers multiples de 5 s'écrit donc $\sum_{k=1}^{n} 5k$. Or,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} 5k = 5\sum_{k=1}^{n} k = \frac{5n(1+n)}{2}$$

8.2.5 Suites géométriques

On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique, s'il existe $q \in \mathbb{R}$ tel que $(\forall n \in \mathbb{N})\,(u_{n+1} = qu_n)$ et $u_0 \in \mathbb{R}$. q est appelé la raison de cette suite

Remarque 6 :

1. Si la raison $q = 0$, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = 0$; nous sommes donc devant la suite nulle à partir du rang 1. De même, si le premier terme $u_0 = 0$, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 0$; nous sommes donc devant la suite nulle ; ces deux cas sont semblables et sans intérêt
2. Dans les cas où **ni le premier terme u_0, ni la raison q ne sont nuls**, la définition 8.2.5 est équivalente à la suivante : $(\forall n \in \mathbb{N})\left(\frac{u_{n+1}}{u_n} = q\right)$

Exercice 4 :

Trois nombres a, b et c sont dits en **progression géométrique** si $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = q$
Trois nombres a, b et c forment une progression géométrique. On suppose que $a + b + c = 7$ et que $2a + b = 0$. Calculer a,b et c

Si a, b, et c sont en progression géométrique, alors, $b = aq$ et $c = aq^2$, de telle sorte que :

$$a + aq + aq^2 = a\left(1 + q + q^2\right) = 7$$

De la dernière identié, nous tirons que $a \neq 0$ et $1 + q + q^2 \neq 0$ [3]
De plus, nous avons $2a + b = 0 \iff 2a + aq = 0 \iff a\,(2 + q) = 0$. Comme $a \neq 0$, nous avons $q = -2$ et donc $3a = 7$. D'où :

$$a = \frac{7}{3} \qquad b = \frac{-14}{3} \qquad c = \frac{28}{3}$$

8.2.6 Proposition

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique, si et seulement si $(\forall n \in \mathbb{N})\left((u_n)^2 = u_{n+1} \times u_{n-1}\right)$

Démonstration

À faire seul ; il faut s'inspirer de 8.2.2

8.2.7 Proposition

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison q
Alors

1. **Pour tout $n \geqslant p$, $u_n = q^{n-p} \times u_p$.**
   En particulier si le premier terme est u_0, nous avons : $\boxed{u_n = u_0 q^n}$
2. $(\forall n \in \mathbb{N})\,(\forall p \in \mathbb{N})\,(\forall k \in \mathbb{N})\,(p \leqslant k \leqslant n)\,(u_{n-k}u_{p+k} = u_n u_p)$

Démonstration

Une nouvelle fois, la démonstration est très simple et laissée à faire tout seul ; il faut s'inspirer de 8.2.3

3. De toute façons, pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous avons $1 + x + x^2 \geqslant \frac{3}{2}$

Remarque 7 :

1. Il est bon, à nouveau, de remarquer que les suites géométriques sont les restrictions à $\mathbb{N}$ des fonctions exponentielles du type $f(x) = aq^x$ si $q > 0$
2. On démontre ainsi que les suites sont géométriques, si et seulement si elles sont du type $u_n = aq^n$.
3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison $q > 0$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0q^n$. En construisant $w_n = \ln u_n$, nous avons : $w_n = \ln a + n \ln q$ et la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ apparaît comme une suite arithmétique.

8.2.8 Somme des termes d'une suite géométrique

1. **Soit** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **une suite géométrique de raison** q **où** q **est différent de 1 (**$q \neq 1$**)**

   Comme précédemment, on pose $S_{p,n} = \sum_{k=p}^{n} u_k = u_p + u_{p+1} + \cdots + u_n$

   Alors $S_{p,n} = \dfrac{u_p(1 - q^{n+1-p})}{1 - q}$

   On a, en particulier, $\boxed{S_{0,n} = S_n = \dfrac{u_0(1 - q^{n+1})}{1 - q}}$
2. **Si** $q = 1$**, alors** $S_{p,n} = (n + 1 - p)u_p$

Remarque 8 :

Un moyen de retenir la formule est celui-ci :

$$\boxed{\text{Somme} = \frac{\text{premier terme} \times \left(1 - \text{raison}^{\text{nombre de termes}}\right)}{1 - \text{raison}}}$$

Démonstration

Démonstration du théorème sur la somme des termes d'une suite géométrique

On réécrit l'expression de $S_{p,n}$:

$$S_{p,n} = \sum_{k=p}^{n} u_k = u_p + u_{p+1} + \cdots + u_{n-1} + u_n$$

En multipliant $S_{p,n}$ par $-q$, nous obtenons :

$$-qS_{p,n} = -qu_p - qu_{p+1} - \ldots - qu_{n-1} - qu_n$$

Or $qu_p = u_{p+1}$, donc

$$-qS_{p,n} = -u_{p+1} - \ldots - u_n - u_{n+1}$$

Donc, $S_{p,n} - qS_{p,n} = u_p - u_{n+1}$; on tire donc de cette égalité : $S_{p,n} = \dfrac{u_p - u_{n+1}}{1 - q}$; or, d'après 8.2.7, $u_{n+1} = u_pq^{n+1-p}$; donc :

$$S_{p,n} = \frac{u_p\left(1 - q^{n+1-p}\right)}{1 - q}$$

Ce que nous voulions

Exercice 5 :

1. Calculer, pour $X \neq 1$ une expression plus simple du polynome $P(X)$ suivant :

$$P(X) = 1 + X + X^2 + X^3 + \ldots + X^{n-1} + X^n$$

Si on considère la suite géométrique de raison $X \neq 1$ et de premier terme $U_0 = 1$, $P(X)$ apparait comme la somme de termes d'une suite géométrique. Donc,

$$P(X) = \frac{1 - X^{n+1}}{1 - X}$$

2. En déduire une factorisation de P considéré comme polynome à coefficients complexes.

On peut remarquer que 1 n'est pas racine de P. D'après la question précédente,

$$P(X) = \frac{1 - X^{n+1}}{1 - X}$$

Donc, $P(X) = 0 \Longleftrightarrow 1 - X^{n+1} = 0$. Les racines de P sont donc toutes les racines $n+1$-ièmes de 1 sauf 1. Les racines sont donc de la forme $X_k = e^{\frac{2ik\pi}{n+1}}$ Une factorisation de P est donc donnée par

$$P(X) = \prod_{k=1}^{n} \left(X - e^{\frac{2ik\pi}{n+1}}\right)$$

Exercice 6 :

Factoriser $X^n - Y^n$

Nous allons, bien entendu, écarter les cas où $X = 0$, $Y = 0$ et $X = Y$. Supposons que nous nr soyions dans aucun des cas ci-dessus ; alors,

$$X^n - Y^n = X^n \left(1 - \frac{Y^n}{X^n}\right) = X^n \left(1 - \left(\frac{Y}{X}\right)^n\right)$$

D'après l'exercice précédent : $(1 - X) P(X) = 1 - X^{n+1}$.

Donc, $\left(1 - \left(\frac{Y}{X}\right)^n\right) = \left(1 - \frac{Y}{X}\right)\left(1 + \frac{Y}{X} + \left(\frac{Y}{X}\right)^2 + \left(\frac{Y}{X}\right)^3 + \ldots + \left(\frac{Y}{X}\right)^{n-2} + \left(\frac{Y}{X}\right)^{n-1}\right)$

D'où :

$$\begin{aligned}
X^n - Y^n = & \; X^n \left(1 - \left(\frac{Y}{X}\right)^n\right) \\
= & \; X^n \left(1 - \frac{Y}{X}\right)\left(1 + \frac{Y}{X} + \left(\frac{Y}{X}\right)^2 + \left(\frac{Y}{X}\right)^3 + \ldots + \left(\frac{Y}{X}\right)^{n-2} + \left(\frac{Y}{X}\right)^{n-1}\right) \\
= & \; \left(1 - \frac{Y}{X}\right)\left(X^n + X^{n-1}Y + X^{n-2}Y^2 + X^{n-3}Y^3 + \ldots + X^2Y^{n-2} + XY^{n-1}\right) \\
= & \; (X - Y)\left(X^{n-1} + X^{n-2}Y + X^{n-3}Y^2 + X^{n-2}Y^3 + \ldots + XY^{n-2} + Y^{n-1}\right)
\end{aligned}$$

Nous avons donc : $\boxed{X^n - Y^n = (X - Y)\left(X^{n-1} + X^{n-2}Y + X^{n-3}Y^2 + X^{n-2}Y^3 + \ldots + XY^{n-2} + Y^{n-1}\right)}$

Exercice 7 :

On définit les deux suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par ses deux premiers termes $u_0 = 1$ et $u_1 = 2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = \frac{3}{2}u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n$

Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $v_n = u_{n+1} - u_n$

1. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique ; calculez le terme général v_n en fonction de n

Tout d'abord, remarquons que $v_0 = u_1 - u_0 = 1$. D'autre part,

$$\begin{aligned}
v_{n+1} = & \; u_{n+2} - u_{n+1} \\
= & \; \frac{3}{2}u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n - u_{n+1} \\
= & \; \frac{1}{2}u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n \\
= & \; \frac{1}{2}v_n
\end{aligned}$$

La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc géométrique et de raison $\frac{1}{2}$.

Nous avons donc $v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n v_1 = \frac{1}{2^n}$

2. En déduire calculez le terme général u_n en fonction de n ; quelle est la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque n tend vers l'infini.

   Nous allons utiliser, ici, ce qu'on a coutume d'appeler une méthode ≪ télescopique ≫.
   Présentons les résultats sous forme de tableau :

$$\begin{array}{rl} v_{n-1} = & u_n - u_{n-1} \\ v_{n-2} = & u_{n-1} - u_{n-2} \\ \vdots & \vdots \\ v_2 = & u_2 - u_1 \\ v_0 = & u_1 - u_0 \end{array}$$

   En additionnant, nous obtenons : $v_0+v_1+\cdots+v_{n-2}+v_{n-1} = (u_1-u_0)+(u_2-u_1)+\cdots+(u_{n-1}-u_{n-2})+(u_n-u_{n-1}) = u_n - u_0$.

   Nous avons donc $u_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_{n-2} + v_{n-1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} v_k$. Cette dernière somme est la somme des termes d'une suite géométrique, et donc :

$$u_n - u_0 = \sum_{k=0}^{n-1} v_k = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k} = \frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}} = 2\left(1-\frac{1}{2^n}\right) = 2 - \frac{1}{2^{n-1}}$$

   Et donc, $u_n = u_0 + 2 - \dfrac{1}{2^{n-1}} = 3 - \dfrac{1}{2^{n-1}}$

3. Trouver le plus petit entier N_0 tel que, pour tout entier $n \geqslant N_0$, on ait $|u_n - 3| < 10^{-5}$

   Il nous faut donc résoudre l'inéquation :

$$|u_n - 3| < 10^{-5} \iff \left|3 - \frac{1}{2^{n-1}} - 3\right| < 10^{-5} \iff \frac{1}{2^{n-1}} < 10^{-5}$$

   Or, $\dfrac{1}{2^{n-1}} < 10^{-5} \iff 2^{n-1} > 10^5$, c'est à dire, en passant au logarithme,

$$(n-1)\ln 2 > 5\ln 10 \iff n > 5\left(1 + \frac{\ln 5}{\ln 2}\right) + 1$$

   C'est à dire, $n > 17$. Nous avons donc $N_0 = 18$

8.2.9 Exercices

Exercice 8 :

Soit $u_n = \dfrac{2}{5}u_{n-1} + \dfrac{1}{5}$. Calculer α pour que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_n = u_n - \alpha$ soit une suite géométrique.

Exercice 9 :

On définit une suite récurrente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par la donnée de u_0 et la condition suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq 1 \quad u_{n+1} = \frac{5u_n + 3}{u_n + 3}$$

1. On pose $v_n = \dfrac{u_n - 3}{u_n + 1}$
   (a) Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique ; en préciser la raison.
   (b) Calculer v_n en fonction de u_0 et de n
2. Etudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans les cas suivants :

   (a) $u_0 = 3$ (b) $u_0 = -1$ (c) $u_0 = 4$

Exercice 10 :

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\begin{cases} u_1 = \dfrac{1}{3} \\ u_{n+1} = \dfrac{n+1}{3n} u_n \end{cases}$$

1. Montrer que la suite de terme général $v_n = \dfrac{u_n}{n}$ est une suite géométrique
2. En déduire une formule explicite de u_n
3. Donner $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

Exercice 11 :

Cet exercice s'inspire de la structure des nombres en machines.
On considère une suite double $(x_{i,j})_{i\in\mathbb{N},j\in\mathbb{N}}$ de réels positifs. On peut représenter ces réels sous forme de matrice infinie, dans lequel i désigne le numéro de la ligne, et j celui de la colonne. On suppose que ces réels sont tels que :

$$\begin{cases} x_{i,j+1} - x_{i,j} = l_i \\ x_{i+1,j} = q x_{i,j} \end{cases}$$

C'est à dire que les réels disposés en ligne, sur la ligne numéro i, forment une suite arithmétique de raison l_i *(la raison dépend de la ligne)*, alors que les nombres disposés en colonne forment une suite géométrique de raison q, q étant constant.
Démontrer que, pour tout $i \in \mathbb{N}$ et tout $j \in \mathbb{N}$, nous avons :

$$x_{i,j} = q^{i-1} \left[x_{1,1} + (j-1) \, l_1 \right]$$

montrant ainsi que les termes q, l_1 et $x_{1,1}$ définissent complètement cette suite double

Exercice 12 :

On considère le programme suivant écrit dans le langage de description `TestAlgo` :

```
algo Exercice

var
   reel x, y;

principal
  debut
   x:=1;
   y:=10;
   tantque (x+y>5)
    faire
  y:=2*x+y;
  x:=-2*x;
   fintantque
fin
```

Pour étudier le comportement de ce programme, et, en particulier savoir s'il ne boucle pas de manière infinie, on considère les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans lesquelles, les nombres x_n et y_n représentent l'état (ou les valeurs) des variables x et y à l'itération n. Ainsi, nous avons :

$$\begin{cases} x_0 = 1 \text{ et } y_0 = 10 \\ x_{n+1} = -2x_n \\ y_{n+1} = 2x_n + y_n \end{cases}$$

1. Calculer x_1, y_1, x_2, y_2

2. Démontrer que $x_n = (-2)^n$
3. Démontrer que $y_n = 10 + \frac{2}{3}(1 - (-2)^n)$
4. Démontrer qu'il existe un rang n tel que l'instruction

   `tantque (x+y>5)`

   soit fausse.
5. Que conclure quant à la sortie du programme ?

Voici le programme `TestAlgo` traduit en Python :

```python
def f(x,y):
    x = float(x)
    y = float(y)
    compteur = 0
    while x+y>5:
        y = 2*x+y
        x = -2*x
        compteur +=1
    print x, y, compteur
```

Exercice 13 :

Faire une étude la plus complète possible de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 > 0 \\ (u_{n+1})^{\alpha} = \beta u_n \text{ où } \alpha > 0 \text{ et } \beta > 0 \end{cases}$$