8.3 Suites bornées, propriétés vraies à partir d'un certain rang

8.3.1 Définition

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite <u>bornée</u> si l'image de $\mathbb{N}$ par cette suite est bornée

8.3.2 Définition équivalente

Nous allons énoncer une définition équivalente à 8.3.1 et ce sera la seule que nous utiliserons :
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée <u>si et seulement si</u> l'ensemble $\{u_n ; n \in \mathbb{N}\}$ est borné c'est à dire <u>si et seulement si</u>

$$\boxed{(\exists M > 0)\ (\forall n \in \mathbb{N})\ (|u_n| \leqslant M)}$$

Exemple 1 :

1. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ définie par : $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$ est une suite bornée, car pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, nous avons $|u_n| \leq 1$
2. La négation de suite bornée *(cf cours de logique)* est donnée par :
$$(\forall M > 0)(\exists n \in \mathbb{N})(|u_n| > M)$$
3. **Un exemple de suite non bornée** est la suite $(u_n = \left(-\sqrt{2}\right)^n$.

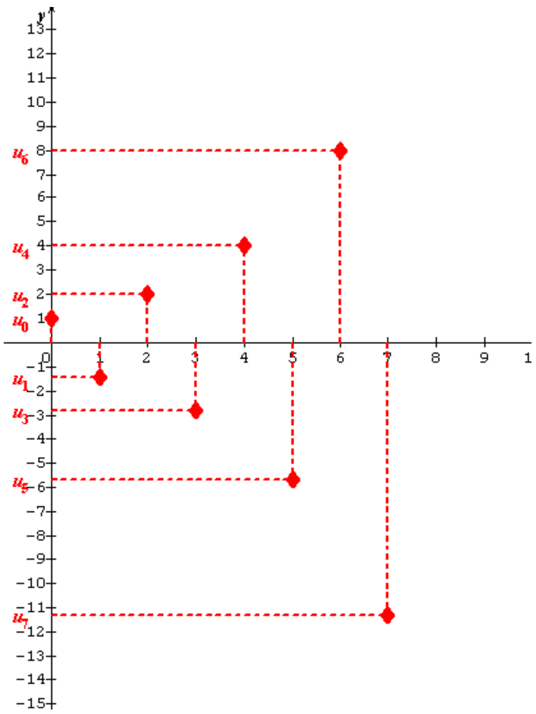

FIGURE 8.2 – Visualisation de la suite $(u_n = \left(-\sqrt{2}\right)^n$ sur quelques termes

En effet, soit $M > 0$, pour que $\left|\sqrt{2}\right|^n \geq M$, il faut que $\dfrac{n}{2}\ln 2 > \ln M$, c'est à dire $n > \dfrac{2\ln M}{\ln 2}$

Exercice 14 :

La suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{n}{2n+1}\left(1+(-1)^n\right)$ est-elle une suite bornée ?

Lorsque nous prenons la valeur absolue, nous avons :

$$|u_n| = \left|\frac{n}{2n+1}\left(1+(-1)^n\right)\right| = \frac{n}{2n+1}\left|\left(1+(-1)^n\right)\right| \leqslant \frac{n}{2n+1} \times 2 < +1$$

Donc, $|u_n| < 1$ et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc majorée par 1

8.3.3 Définition et proposition

On appelle $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{N}$
On définit, dans cet ensemble les opérations suivantes :

1. **Addition** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} + (v_n)_{n\in\mathbb{N}} = (u_n + u_n)_{n\in\mathbb{N}}$
2. **Multiplication** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \times (v_n)_{n\in\mathbb{N}} = (u_n \times v_n)_{n\in\mathbb{N}}$
3. **Multiplication par un scalaire** **Pour tout** $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\lambda u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Muni de l'addition et de la multiplication par un scalaire, $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$

Démonstration

On admet ce résultat

8.3.4 Proposition

Soit $\mathcal{B}$ l'ensemble des suites numériques réelles bornées Alors $\mathcal{B}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

Remarque 9 :

Qu'est ce que ceci veut dire ?

Addition Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{B}$ et si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{B}$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} + (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{B}$

Multiplication par un scalaire Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{B}$ et si $\lambda \in \mathbb{K}$, alors $(\lambda u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{B}$

L'addition et la multiplication par un scalaire réel confère à $\mathcal{B}$, la structure de sous-espace vectoriel.
Pour la multiplication, nous avons le résultat suivant :

Multiplication Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{B}$ et si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{B}$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \times (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{B}$

Démonstration

La démonstration est très simple et est essentiellement basée sur l'inégalité triangulaire des valeurs absolues, inégalités que nous retrouverons dans d'autres démonstrations.
Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{B}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{B}$; alors, en réécrivant l'hypothèse :

— Il existe $M > 0$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leqslant M$
— Il existe $M' > 0$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|v_n| \leqslant M'$

1. En ce qui concerne l'addition, comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leqslant M$ et $|v_n| \leqslant M'$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'après l'inégalité triangulaire,
$$|u_n + v_n| \leqslant |u_n| + |v_n| \leqslant M + M'$$
Ce qui montre que l'addition de 2 suites bornées est aussi une suite bornée.
2. D'autre part,
$$(\forall \lambda \in \mathbb{R})\,(|\lambda u_n| = |\lambda|\,|u_n| \leqslant |\lambda|\,M)$$
Ce qui montre que si on multiplie une suite bornée par un scalaire réel, on obtient aussi une suite bornée.
3. De même,
$$|u_n v_n| = |u_n|\,|v_n| \leqslant M \times M'$$
Ce qui montre bien que le produit de 2 suites bornées est une suite bornée, c'est à dire, un élément de $\mathcal{B}$

8.3.5 Propriétés vraies à partir d'un certain rang

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite avoir une propriété (P) à partir d'un certain rang, s'il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geqslant N_0$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a la propriété (P)

Exemple 2 :

1. La suite $u_n = \dfrac{1}{10} - \dfrac{1}{n^2}$ est positive, dès que $n > \sqrt{10}$, c'est à dire dès que $n \geqslant 4$, c'est à dire dès que $n \geqslant E\left(\sqrt{10}\right) + 1$ où E désigne la partie entière.
2. Pour $\varepsilon > 0$, $u_n = \varepsilon - \dfrac{1}{n}$ est positif à partir d'un certain rang $N_0 = E\left(\dfrac{1}{\varepsilon}\right) + 1$
3. La suite $\dfrac{(\ln n)^4}{n^2}$ est décroissante à partir du rang $n = 8$

   Comment démontrer ce résultat ? Il suffit de constater que $\dfrac{(\ln n)^4}{n^2}$ est la restriction à $\mathbb{N}$ de la fonction numérique $\dfrac{(\ln x)^4}{x^2}$ définie sur $\mathbb{R}^{*+}$; et les variations de la suite suivront les variations de la fonction numérique. Donc, si $f(x) = \dfrac{(\ln x)^4}{x^2}$, les variations de f seront données par le signe de la dérivées de f.

   Or, $f'(x) = \dfrac{2x \ln x (2 - \ln x)}{x^4}$. Le signe de f' est donc celui de $2 - \ln x$. Ainsi :
   - Si $0 < x < e^2$, la dérivée est positive et la fonction est croissante.
   - Si $x > e^2$, la dérivée est négative et la fonction est décroissante.

   Comme $e^2 \simeq 7,389$, on en déduit que si $n \geqslant 8$, la suite $\dfrac{(\ln n)^4}{n^2}$ est donc décroissante à partir du rang $n = 8$
4. De même, la suite $\dfrac{(10)^n}{n!}$ est décroissante à partir du rang $n = 10$

   En posant $u_n = \dfrac{(10)^n}{n!}$, nous faisons le rapport $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$.

   Donc, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{10^{n+1}}{(n+1)!} \times \dfrac{n!}{10^n} = \dfrac{10}{n+1}$. Ainsi,
   - Si $n \geqslant 10$, nous avons $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1$ et la suite $\dfrac{(10)^n}{n!}$ est décroissante à partir du rang $n = 10$
   - Si $n \leqslant 10$, nous avons $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$ et la suite $\dfrac{(10)^n}{n!}$ est croissante jusqu'au rang $n = 10$
5. **Une suite est stationnaire** si elle est constante à partir d'un certain rang.