8.4 Limite d'une suite

8.4.1 Définition de suite qui tend vers 0

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique réelle
On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers zéro, et on écrit

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 0}$$

Si, pour tout nombre $\varepsilon > 0$, $|u_n| \leqslant \varepsilon$ à partir d'un certain rang

Remarque 10 :

Autrement dit

1. $\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 0 \Leftrightarrow (\forall\varepsilon > 0)\,(\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N})\,(\forall n \in \mathbb{N})\,(n \geqslant N_\varepsilon \Rightarrow |u_n| \leqslant \varepsilon)}$
2. On dit alors, que u_n est infiniment petit lorsque n est infiniment grand

Exemple 3 :

1. **Exemples de suites tendant vers zéro**

   (a) $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$

   En effet, soit $\varepsilon > 0$,

   Alors, $|u_n| = \left|\dfrac{(-1)^n}{n}\right| = \dfrac{1}{n}$, et $\dfrac{1}{n} \leqslant \varepsilon$ dès que $n \geqslant \dfrac{1}{\varepsilon}$.

   En choisissant $N_\varepsilon = [\dfrac{1}{\varepsilon}] + 1$, nous avons $N_\varepsilon > \dfrac{1}{\varepsilon}$ et :

$$n \geqslant N_\varepsilon \Longrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon} \Longrightarrow |u_n| \leqslant \varepsilon$$

   Donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$

   (b) La suite $u_n = \dfrac{1}{n}$ est aussi une suite qui tend vers zéro ; la démonstration est tout à fait semblable à celle ci-dessus.

   (c) $v_n = \dfrac{1}{n^2}$

   C'est aussi une suite qui tend vers zéro.

   En effet, soit $\varepsilon > 0$,

   Alors, $|u_n| = \left|\dfrac{1}{n^2}\right| = \dfrac{1}{n^2}$, et $\dfrac{1}{n^2} \leqslant \varepsilon \Longleftrightarrow \dfrac{1}{n} \leqslant \sqrt{\varepsilon}$. Ainsi, nous avons $\dfrac{1}{n^2} \leqslant \varepsilon$ dès que $n \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$.

   En choisissant $N_\varepsilon = [\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}] + 1$, nous avons $N_\varepsilon > \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$ et :

$$n \geqslant N_\varepsilon \Longrightarrow n > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \Longrightarrow |u_n| \leqslant \varepsilon$$

   Donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0$

2. **Exemples de suites qui ne tendent pas vers zéro**

   (a) $u_n = \dfrac{n}{2n+1}$

Il est très facile de vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, nous avons $\dfrac{1}{3} \leqslant \dfrac{n}{2n+1} < \dfrac{1}{2}$

Pour $\varepsilon = \dfrac{1}{4}$, et pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant N$ et $|u_n| \geqslant \dfrac{1}{4} = \varepsilon$

Donc, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0

(b) $u_n = \left(-\sqrt{2}\right)^n$

Bien sûr qu'étant non bornée, la suite $u_n = \left(-\sqrt{2}\right)^n$ ne tend pas vers zéro !!

8.4.2 Proposition

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique réelle
Alors :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} |u_n| = 0}$$

Démonstration

La démonstration est évidente ; il suffit de relire la définition de suite qui tend vers zéro

Exemple 4 :

Cette proposition est très utile pour démontrer la convergence vers zéro de suites dont les signes sont alternativement positifs ou négatifs : on peut penser à $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$ ou à $\dfrac{(-1)^n}{n^p}$ avec $p \in \mathbb{N}^*$

8.4.3 Théorème

Soit $\mathcal{O}$ l'ensemble des suites tendant vers zéro. Alors, $\mathcal{O}$ est stable par l'addition, la multiplication et la multiplication par un scalaire
Autrement dit :
Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites qui tendent vers zéro, alors

Stabilité par l'addition $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + v_n) = 0$

Stabilité pour la multiplication $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n \times v_n) = 0$

Stabilité pour la multiplication par un scalaire $(\forall\lambda \in \mathbb{R}) \left(\lim\limits_{n\to+\infty} \lambda u_n\right) = 0$

$\mathcal{O}$ est donc un $\mathbb{R}$-espace vectoriel

Démonstration

1. **On démontre pour la somme**

   On suppose $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$, alors

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0 \Leftrightarrow (\forall\varepsilon > 0)(\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n \geqslant N_\varepsilon \Rightarrow |u_n| \leqslant \varepsilon)$$

   Il existe donc un entier $N_\varepsilon^1 \in \mathbb{N}$ tel que

$$n \geqslant N_\varepsilon^1 \Rightarrow |u_n| < \frac{\varepsilon}{2}$$

   De même, il existe un entier $N_\varepsilon^2 \in \mathbb{N}$ tel que

$$n \geqslant N_\varepsilon^2 \Rightarrow |v_n| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Donc, si $n \geqslant N_\varepsilon^1$ et, en même temps,$n \geqslant N_\varepsilon^2$ par exemple, si $n \geqslant N_\varepsilon$ où $N_\varepsilon = \sup(N_\varepsilon^1, N_\varepsilon^2)$, on a alors

$$|u_n + v_n| \leqslant |u_n| + |v_n| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

C'est à dire que $\lim\limits_{n_to+\infty} (u_n + v_n) = 0$

2. **On démontre pour le produit de 2 suites**
   On suppose $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$, alors

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0 \Leftrightarrow (\forall\varepsilon > 0)(\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n \geqslant N_\varepsilon \Rightarrow |u_n| \leqslant \varepsilon)$$

   Il existe donc un entier $N_\varepsilon^1 \in \mathbb{N}$ tel que

$$n \geqslant N_\varepsilon^1 \Rightarrow |u_n| < \sqrt{\varepsilon}$$

   De même, il existe un entier $N_\varepsilon^2 \in \mathbb{N}$ tel que

$$n \geqslant N_\varepsilon^2 \Rightarrow |v_n| < \sqrt{\varepsilon}$$

   Donc, si $n \geqslant N_\varepsilon^1$ et, en même temps,$n \geqslant N_\varepsilon^2$ par exemple, si $n \geqslant N_\varepsilon$ où $N_\varepsilon = \sup(N_\varepsilon^1, N_\varepsilon^2)$, on a alors

$$|u_n \times v_n| = |u_n| \times |v_n| \leqslant \sqrt{\varepsilon} + \sqrt{\varepsilon} = \varepsilon$$

   C'est à dire que $\lim\limits_{n_to+\infty} (u_n \times v_n) = 0$

3. **Pour le produit par un scalaire,** il suffit d'appliquer le résultat précédent à la suite constante $v_n = \lambda$

Remarque 11 :

On peut utiliser ces fameuses phrases faciles à retenir :
- **La limite de la somme, c'est la somme des limites**
- **La limite du produit, c'est le produit des limites**

8.4.4 Utilisation des techniques de majoration

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 2 suites telles que $|u_n| \leqslant |v_n|$ à partir d'un certain rang autrement dit

$$(\exists N_0 \in \mathbb{N})\,(\forall n \in \mathbb{N})\,(n \geqslant N_0 \Longrightarrow |u_n| \leqslant |v_n|)$$

Alors

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} v_n = 0 \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n = 0}$$

Remarque 12 :

C'est un théorème **très important**, très souvent utilisé, justifiant l'utilisation des suites de référence

Démonstration

Elle est simple et utilise la définition de la limite. La voici :
Ecrivons tout d'abord que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0
Soit $\varepsilon > 0$; il existe donc $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que, si $n \geqslant N_0$, alors, $|u_n| \leqslant \varepsilon$
Donc, si $n \geqslant N_0$ et si il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant N_1 \Rightarrow |u_n| \leqslant |v_n|$, et ce d'après l'hypothèse, en posant $N^\varepsilon = \sup(N_1, N_2)$, alors, pour $n \geqslant N^\varepsilon$, on a $n \geqslant N_0$ et $n \geqslant N_1$, donc $|u_n| \leqslant |v_n| \leqslant \varepsilon$
D'où le résultat

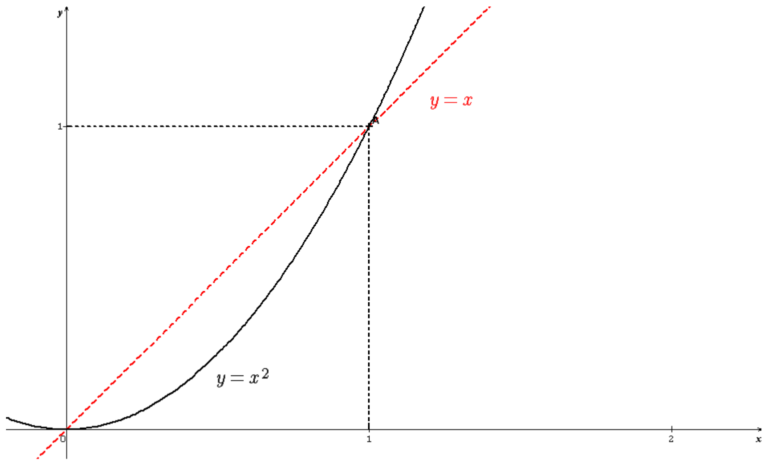

FIGURE 8.3 – La visualisation de la comparaison des fonctions $y = x$ et $y = x^2$ qui permet aussi de comparer les suites $\frac{1}{n}$ et $\frac{1}{n^2}$

Exemple 5 :

On peut utiliser ce théorème pour démontrer que la suite $\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, avec $\alpha > 1$, converge vers zéro; Il suffit d'utiliser que $n^\alpha \geqslant n$ si $n \geqslant 1$
Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, nous avons $0 \leqslant \frac{1}{n^\alpha} \leqslant \frac{1}{n}$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$, nous avons $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0$

Exercice 15 :

Donner la limite lorsque n tend vers $+\infty$ de la suite de terme $u_n = \frac{2+(-1)^n}{n}$

En prenant la valeur absolue, nous avons :

$$|u_n| = \left|\frac{2+(-1)^n}{n}\right| \leqslant \frac{3}{n}$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{3}{n} = 0$, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

Exercice 16 :

1. Démontrer que $n! \geqslant n$ et que $n^n \geqslant n$.

   Il y a plusieurs façons de démontrer ces deux résultats. Dans les deux cas, pour $n = 0$, nous avons $0! = 1$ et donc, $0! > 0$ et $0^0 = 1$ et donc $0^0 > 0$. Par contre, pour $n = 1$, $1! = 1^1 = 1$, et on conclue donc que pour $n = 0$ ou $n = 1$, $n! \geqslant n$ et $n^n \geqslant n$. Suposons, maintenant que $n \geqslant 2$.
   — Le rapport $\frac{n!}{n} = (n-1)! \geqslant 1$ donc, si $n \geqslant 2$, $n! \geqslant n$
   — De même, le rapport $\frac{n^n}{n} = n^{n-1} \geqslant 1$ donc, si $n \geqslant 2$, $n! \geqslant n$
   Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n! \geqslant n$ et $n^n \geqslant n$

   En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n!} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^n} = 0$

   Des inégalités ci-dessus, nous tirons $\frac{1}{n!} \leqslant \frac{1}{n}$ et $\frac{1}{n^n} \leqslant \frac{1}{n}$.

   Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n!} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^n} = 0$

2. Soit $k \in \mathbb{R}$, tel que $|k| < 1$
   (a) Pour, $a > 1$, $a = 1 + a'$ où $a' > 0$. Montrer que $a^n \geqslant 1 + na'$

   Cette démonstration peut se faire de 2 manières : par récurrence sur n ou en utilisant la formule du binôme de Newton.

   Par récurrence On appelle $P(n)$ la propriété $P(n)$: $(1+a')^n \geqslant 1 + na'$
   - On vérifie facilement que $P(0)$ est vrai
   - Supposons que $P(n)$ est vraie
   - Démontrons que $P(n+1)$ est vraie.
     $(1+a')^{n+1} = (1+a')^n \times (1+a') \geqslant (1+na') \times (1+a') = 1+(n+1)a' + na'^2 > 1+(n+1)a'$

   Ainsi, nous venons de montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(1+a')^n \geqslant 1 + na'$

   En utilisant le binôme de Newton

$$\begin{aligned}(1+a')^n &= \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k a'^k \\ &= \mathrm{C}_n^0 a'^0 + \mathrm{C}_n^1 a'^1 + \sum_{k=2}^{n} \mathrm{C}_n^k a'^k \\ &= 1 + na' + \sum_{k=2}^{n} \mathrm{C}_n^k a'^k\end{aligned}$$

   Or, $1 + na' + \sum_{k=2}^{n} \mathrm{C}_n^k a'^k \geqslant 1 + na'$; donc, $(1+a')^n \geqslant 1 + na'$

   (b) En déduire que $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{a^n} = 0$

   Ainsi, si $a > 1$, nous avons $a = 1 + a'$ avec $a' > 0$. Donc,

$$\frac{1}{a^n} = \frac{1}{(1+a')^n} \leqslant \frac{1}{1+na'}$$

   Comme $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{1+na'} = 0$, nous avons $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{a^n} = 0$

   (c) En déduire que $\lim_{n\to+\infty} k^n = 0$

   Soit $k \in \mathbb{R}$, tel que $|k| < 1$; il existe alors $a \in \mathbb{R}$, et $a > 1$ tel que $|k| = \frac{1}{a}$. Donc, $|k|^n = \frac{1}{a^n}$.

   On vient de montrer que $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{a^n} = 0$, on en déduit que $\lim_{n\to+\infty} |k|^n = 0$, et donc que $\lim_{n\to+\infty} k^n = 0$

3. **Résultat : Les suites géométriques de raison k telles que $|k| < 1$ convergent vers zéro**

Exercice 17 :

1. Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R})\,(|\sin x| \leqslant |x|)$

   Voici une question classique de comparaison. L'inégalité $|\sin x| \leqslant |x|$ est totalement équivalente à la double inégalité : $-x \leqslant \sin x \leqslant x$. Pour démontrer cette double inégalité, nous allons utiliser deux fonctions auxiliaires dont nous étudierons le signe. La première sera $\varphi(x) = \sin x - x$ et la seconde $\psi(x) = \sin x + x$
   - Etude de $\varphi(x) = \sin x - x$
     En calculant la dérivée, nous avons $\varphi'(x) = \cos x - 1$; comme, pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous avons $\cos x \leqslant 1$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi'(x) \leqslant 0$ et la fonction φ est décroissante.
     De $\varphi(0) = 0$, nous déduisons que
     - Si $x \leqslant 0$, $\sin x - x \geqslant 0 \Longleftrightarrow \sin x \geqslant x$
     - Si $x \geqslant 0$, $\sin x - x \leqslant 0 \Longleftrightarrow \sin x \leqslant x$
   - Etude de $\psi(x) = \sin x + x$
     En calculant la dérivée, nous avons $\psi'(x) = \cos x + 1$; comme, pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous avons $\cos x \geqslant -1$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi'(x) \geqslant 0$ et la fonction ψ est croissante.
     De $\psi(0) = 0$, nous déduisons que
     - Si $x \leqslant 0$, $\sin x + x \leqslant 0 \Longleftrightarrow \sin x \leqslant -x$
     - Si $x \geqslant 0$, $\sin x + x \geqslant 0 \Longleftrightarrow \sin x \geqslant -x$

   En synthèse, nous avons, si $x \leqslant 0$, $x \leqslant \sin x \leqslant -x$, et si $x \geqslant 0$, $-x \leqslant \sin x \leqslant x$

   C'est à dire, que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous avons $|\sin x| \leqslant |x|$

2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = a$ et $u_{n+1} = \sin\left(\frac{u_n}{2}\right)$. Démontrer que, $(\forall n \in \mathbb{N})\left(|u_n| \leqslant \frac{|u_0|}{2^n}\right)$.

En utilisant la question ci-dessus, nous avons $|u_n| = |\sin u_{n-1}| \leqslant \left|\dfrac{u_{n-1}}{2}\right| = \dfrac{|u_{n-1}|}{2}$.

Pour démontrer que $\left(|u_n| \leqslant \dfrac{|u_0|}{2^n}\right)$, on peut le faire par récurrence ou en utilisant les multiplications successives. En effet :

$$\begin{aligned}
|u_n| &\leqslant \frac{|u_{n-1}|}{2}\\
|u_{n-1}| &\leqslant \frac{|u_{n-2}|}{2}\\
&\vdots\quad \vdots\\
|u_2| &\leqslant \frac{|u_1|}{2}\\
|u_1| &\leqslant \frac{|u_0|}{2}
\end{aligned}$$

En multipliant termes à termes, nous avons :

$|u_n|\times|u_{n-1}|\times\cdots\times|u_2|\times|u_1| \leqslant \dfrac{|u_{n-1}|}{2}\times\dfrac{|u_{n-2}|}{2}\times\cdots\times\dfrac{|u_1|}{2}\times\dfrac{|u_0|}{2} = |u_{n-1}|\times|u_{n-2}|\times\cdots\times|u_1|\times|u_0|\times\dfrac{1}{2^n}$

C'est à dire :

$$|u_n|\times|u_{n-1}|\times\cdots\times|u_2|\times|u_1| \leqslant |u_{n-1}|\times|u_{n-2}|\times\cdots\times|u_1|\times|u_0|\times\frac{1}{2^n}$$

En simplifiant, nous obtenons : $|u_n| \leqslant |u_0| \times \dfrac{1}{2^n}$ Ce que nous voulions.

En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

Nous avons $\lim |u_0| \times \dfrac{1}{2^n} = 0$, car c'est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$ donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

8.4.5 Définition de suite qui tend vers l

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite numérique réelle. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a pour limite l si et seulement si la suite $(u_n - l)_{n\in\mathbb{N}}$ a pour limite 0

Remarque 13 :

1. On dit alors que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$
2. On peut penser autrement l'idée que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$. Le fait que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$ veut dire que $|u_n - l|$ peut être rendu aussi petit que l'on veut, à partir d'un certain rang, c'est à dire que :
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = l \Leftrightarrow (\forall\varepsilon > 0)\,(|u_n - l| < \varepsilon) \text{ à partir d'un certain rang}$$
3. C'est à dire
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = l \Leftrightarrow (\forall\varepsilon > 0)\,(|u_n - l| < \varepsilon)\ \text{ à partir d'un certain rang } N_\varepsilon \in \mathbb{N}$$
N_ε dépend du $\varepsilon > 0$ choisi.
4. Forme formalisée
$$\boxed{(\exists l \in \mathbb{R})\,(\forall\varepsilon > 0)\,(\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N})\,(\forall n \in \mathbb{N})\,(n \geqslant N_\varepsilon \Rightarrow |u_n - l| < \varepsilon)}$$
5. Une suite qui ne converge pas est dite divergente ; autrement dit, $(\forall l \in \mathbb{R})\,(u_n - l)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers zéro
6. Il est rare que l'étude des limites exige l'utilisation directe de la définition de la limite *(en tout cas, ceci dépasse notre propos)* ; on l'utilise pour démontrer certains résultats forts utiles et qui peuvent être directement utilisés. On en verra quelques uns.

8.4.6 Proposition

Toute suite convergente est bornée

Démonstration

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite qui converge vers l. Ecrivons qu'elle converge.
Soit $\varepsilon > 0$
Alors, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geqslant N$ alors $|u_n - l| \leqslant \varepsilon$, c'est à dire que si $n \geqslant N$ alors

$$|u_n - l| \leqslant \varepsilon \Longleftrightarrow -\varepsilon \leqslant u_n - l \leqslant \varepsilon \Longleftrightarrow l - \varepsilon \leqslant u_n \leqslant l + \varepsilon$$

Ce qui signifie que l'ensemble $\{u_n \text{ pour } n \geqslant N\}$ est borné.
D'autre part, l'ensemble $\{u_n \text{ tel que } 0 \leqslant n \leqslant N\}$ est un ensemble fini de nombres réels donc borné
Donc, l'ensemble $\{u_n \text{ tels que } n \in \mathbb{N}\} = \{u_n \text{ tel que } 0 \leqslant n \leqslant N\} \cup \{u_n \text{ pour } n \geqslant N\}$ est borné.
Une suite convergente est donc bornée

Remarque 14 :

La réciproque est fausse. **Exemple :**$(-1)^n$ est une suite bornée, mais non convergente

8.4.7 Proposition

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique, réelle alors, si cette limite existe, cette limite est unique

Démonstration

Voici donc un exemple d'utilisation directe de la définition de la limite

1. On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet donc 2 limites, l et l', **différentes** et on écrit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet ces 2 limites. L'objet de la démonstration sera donc d'arriver à une contradiction, ou plutôt une absurdité.
2. On suppose donc $l \neq l'$, et donc, la distance qui sépare l de l', non nulle, est donc strictement positive ; on l'écrit : $|l - l'| > 0$

Figure 8.4 – Schéma montrant la situation où $l \neq l'$

3. Soit $\varepsilon = \dfrac{|l - l'|}{4}$ On a donc bien $\varepsilon > 0$
4. Ecrivons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet pour limite l et pour limite l'

$$\left(\exists N_\varepsilon^1 \in \mathbb{N}\right)(\forall n \in \mathbb{N})\left(n \geqslant N_\varepsilon^1 \Rightarrow |u_n - l| < \varepsilon\right)$$
$$\left(\exists N_\varepsilon^2 \in \mathbb{N}\right)(\forall n \in \mathbb{N})\left(n \geqslant N_\varepsilon^2 \Rightarrow |u_n - l'| < \varepsilon\right)$$

5. Soit $N_\varepsilon = \sup\left(N_\varepsilon^1, N_\varepsilon^2\right)$, c'est à dire que N_ε est le plus grand de N_ε^1 et N_ε^2, et que donc,$N_\varepsilon \geqslant N_\varepsilon^1$ et $N_\varepsilon \geqslant N_\varepsilon^2$
6. Pour $n > N_\varepsilon$, nous avons

$$|l - l'| \leqslant |u_n - l| + |u_n - l'| \leqslant \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon = 2\frac{|l - l'|}{4} = \frac{|l - l'|}{2}$$

7. Il y a donc une contradiction dans le fait que $|l - l'| \leqslant \dfrac{|l - l'|}{2}$

La limite est donc unique

8.4.8 Règles de calcul : opérations sur les limites

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite numérique convergeant vers l et si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergeant vers l', alors

Addition $(u_n+v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge vers** $l+l'$

Multiplication $(u_n\times v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge vers** ll'

Multiplication par un scalaire $(\forall\lambda\in\mathbb{R})\,(\lambda u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge vers** $\lambda l'$

Démonstration

1. **On fait la démonstration pour l'addition**
   (a) On peut écrire $u_n = l + a_n$ et $v_n = l' + b_n$ avec $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 0$. Pour nous, c'est plus simple, car nous connaissons bien les suites qui tendent vers 0
   (b) Donc : $u_n + v_n = l + l' + a_n + b_n$ c'est à dire $((u_n+v_n)-(l+l')) = a_n + b_n$
   (c) Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n+b_n) = 0$, et donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n + v_n = l + l'$
2. **On fait la démonstration pour la multiplication**
   (a) On écrit toujours $u_n = l + a_n$ et $v_n = l' + b_n$ avec $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 0$.
   (b) Donc, comme
   $$u_n\times v_n = (l+a_n)(l'+b_n) = ll' + lb_n + a_n(l'+b_n)$$
   c'est à dire
   $$(u_n\times v_n) - (ll') = lb_n + a_n(l'+b_n)$$
   (c) Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty}(lb_n + a_n(l'+b_n)) = 0$, et donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n\times v_n = ll'$
3. Pour le produit par un scalaire, il suffit d'appliquer le résultat précédent à la suite constante $v_n = \lambda$

8.4.9 Et le quotient ?

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite numérique convergeant vers l tel que $\boxed{l\neq 0}$, alors

1. **La suite $\left(\dfrac{1}{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie, à partir d'un certain rang, ce qui veut dire, qu'à partir d'un certain rang, $|u_n|>0$ ou, ce qui est équivalent, $u_n\neq 0$**
2. $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{u_n} = \dfrac{1}{l}}$

Démonstration

Á nouveau, nous utilisons la définition théorique de la limite. Une nouvelle fois, nous pouvons remarquer que cette définition est très utile pour démontrer rigoureusement des résultats qu'on utilisera, par la suite, sans soucis.

1. Comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite numérique convergeant vers l et que $l\neq 0$, c'est à dire, $|l|>0$, il existe, $N_0\in\mathbb{N}$ tel que si $n\geqslant N_0$ alors $|u_n - l|\leqslant\dfrac{|l|}{2}$; donc, si $n\geqslant N_0$ alors, en réécrivant l'inégalité précédente, nous avons :
   $$\frac{-|l|}{2}\leqslant u_n - l\leqslant\frac{|l|}{2}\Leftrightarrow l-\frac{|l|}{2}\leqslant u_n\leqslant l+\frac{|l|}{2}$$
   Donc, on a sûrement $u_n\neq 0$ et $\dfrac{1}{u_n}$ existe si $n\geqslant N_0$

2. On pose alors $u_n = l + a_n$ où $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$

   D'après la définition de la limite, pour $\varepsilon = \dfrac{|l|}{2}$, il existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que, si $n \geqslant N_\varepsilon$ alors $|a_n| \leqslant \varepsilon = \dfrac{|l|}{2}$

3. On évalue alors, $\dfrac{1}{u_n} - \dfrac{1}{l}$.
   On a, après calculs :

$$\begin{aligned}\frac{1}{u_n} - \frac{1}{l} &= \frac{1}{a_n + l} - \frac{1}{l} \\ &= \frac{-a_n}{l(1 + a_n)}\end{aligned}$$

4. Il faut donc montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_n}{l(l + a_n)} = 0$
   Or, d'après l'inégalité triangulaire des modules *(ou des valeurs absolues)*, on a : $||l| - |a_n|| \leqslant |a_n + l|$, et donc que $||l| - |a_n|| \leqslant |a_n + l|$

5. Or, si $n \geqslant N_\varepsilon$, nous avons $|a_n| \leqslant \dfrac{|l|}{2}$, c'est à dire : $-|a_n| \geqslant -\dfrac{|l|}{2}$; en additionnant $|l|$ de chaque côté de l'inégalité, nous obtenons :

$$|l| - |a_n| \geqslant \frac{|l|}{2}$$

   C'est à dire *(il n'y a pas de problème de signe)* : $||a_n| - |l|| \geqslant \dfrac{|l|}{2}$
   En conclusion, si $n \geqslant N_\varepsilon$ nous avons $\dfrac{1}{||a_n| - |l||} \leqslant \dfrac{2}{|l|}$ et donc $||l| - |a_n|| \leqslant |a_n + l|$

6. Ceci montre donc que la suite $\dfrac{1}{l(l + a_n)}$ est bornée à partir du rang N_ε ; en effet,

$$||l| - |a_n|| \leqslant |a_n + l|$$

7. On en conclue donc que : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_n}{l(l + a_n)} = 0$, et donc, en conclusion, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{u_n} = \dfrac{1}{l}$

Ce que nous voulions

Remarque 15 :

Les résultats précédents permettent de démontrer que si, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l, et que si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l' avec $l' \neq 0$, alors, $\left(\dfrac{u_n}{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\dfrac{l}{l'}$

8.4.10 Théorème des limites par encadrement

Ce théorème est aussi connu sous le nom de « Théorème des gendarmes » qui n'est pas du tout une appellation contrôlée.

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$, 3 suites telles que $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$ à partir d'un certain rang N_0
On suppose de plus que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = l$

Alors, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l}$

Démonstration

Une nouvelle illustration de l'utilisation d'une définition théorique, pour démontrer un résultat très souvent utilisé.
Soit $\varepsilon > 0$

1. **On écrit proprement, que** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$
   Que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$ veut dire qu'il existe $N_\varepsilon^1 \in \mathbb{N}$ tel que, si $n \geqslant N_\varepsilon^1$, alors $|u_n - l| \leqslant \varepsilon$
2. **On écrit ensuite que** $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = l$
   De même, il existe $N_\varepsilon^2 \in \mathbb{N}$ tel que, si $n \geqslant N_\varepsilon^2$, alors $|w_n - l| \leqslant \varepsilon$
3. **On utilise le compatibilité de l'addition avec la relation d'ordre**
   Pour $n \geqslant N_0$, nous avons : $u_n - l \leqslant v_n - l \leqslant w_n - l$, c'est à dire,
   $$|v_n - l| \leqslant \max\{|u_n - l|, |w_n - l|\}$$
   c'est à dire $|v_n - l| \leqslant |u_n - l|$ et $|v_n - l| \leqslant |w_n - l|$
4. **Conclusion**
   Donc, si $N_\varepsilon = \max\left\{N_\varepsilon^1, N_\varepsilon^2\right\}$, nous avons $N_\varepsilon \geqslant N_\varepsilon^1$ et $N_\varepsilon \geqslant N_\varepsilon^2$; donc, $n \geqslant N_\varepsilon \Rightarrow |u_n - l| \leqslant \varepsilon$, et $n \geqslant N_\varepsilon \Rightarrow |w_n - l| \leqslant \varepsilon$. Donc, $n \geqslant N_\varepsilon \Rightarrow |v_n - l| \leqslant \varepsilon$

Ce qui montre que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l$

Exemple 6 :

Application de ce théorème : Etudier la limite de $\displaystyle\sum_{k=1}^{3n+4} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$

Pour $k \in \{1, \ldots, 3n+4\}$, c'est à dire $1 \leqslant k \leqslant 3n+4$, nous avons :

$$n \leqslant \sqrt{n^2+k} \leqslant \sqrt{n^2+3n+4}$$

Donc, en passant à l'inverse,

$$\frac{1}{\sqrt{n^2+3n+4}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} \leqslant \frac{1}{n}$$

puis en passant à la sommation :

$$\frac{3n+4}{\sqrt{n^2+3n+4}} \leqslant \sum_{k=1}^{3n+4} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} \leqslant \frac{3n+4}{n}$$

Comme $\dfrac{3n+4}{n} = 3 + \dfrac{4}{n}$, que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3n+4}{n} = 3$ et que, d'autre part :

$$\frac{3n+4}{\sqrt{n^2+3n+4}} = \frac{3n+4}{n\sqrt{1+\dfrac{3}{n}+\dfrac{4}{n^2}}} = \frac{3+\dfrac{4}{n}}{\sqrt{1+\dfrac{3}{n}+\dfrac{4}{n^2}}},$$

on a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3n+4}{\sqrt{n^2+3n+4}} = 3$

On en déduit donc que : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\sum_{k=1}^{3n+4} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} = 3}$

Exercice 18 :

Cet exercice utilise diverses techniques de majoration pour le calcul de limites

1. (a) Montrer l'égalité suivante, vraie si $x \in \mathbb{R}^+$:$x - \dfrac{x^3}{6} \leqslant \sin x \leqslant x$

   Dans un exercice précédent, l'exercice 8.4.4, nous avons déjà montré que si $x \geqslant 0$, alors $\sin x \leqslant$.
   Montrons maintenant l'autre inégalité, en posant $\Phi(x) = \sin x - \left(x - \dfrac{x^3}{6}\right)$

   La dérivée de Φ est $\Phi'(x) = \cos x - \left(1 - \dfrac{x^2}{2}\right)$ dont il est difficile de donner le signe ! !

Dérivons une seconde fois : $\Phi''(x) = -\sin x + x$, et si $x \geqslant 0$, $\Phi''(x) \geqslant 0$, et donc Φ' est une fonction croissante. D'où, pour tout $x \geqslant 0$, nous avons $\Phi'(x) \geqslant \Phi'(0)$. Or, $\Phi'(0) = 0$, et nous en déduis que Φ est croissante sur $\mathbb{R}^+$; en particulier, $\Phi(0) \geqslant \Phi(0) = 0$, c'est à dire

$$\sin x - \left(x - \frac{x^3}{6}\right) \geqslant 0 \Longleftrightarrow \sin x \geqslant \left(x - \frac{x^3}{6}\right)$$

Nous en déduisons que, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, nous avons $x - \dfrac{x^3}{6} \leqslant \sin x \leqslant x$

(b) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, la suite définie par : $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k}{n^2}\right)$. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, et donner sa limite.

Nous allons utiliser l'inégalité ci-dessus pour répondre à notre question. Pour $1 \leqslant k \leqslant n$, nous avons :

$$\frac{k}{n^2} - \frac{k^3}{6n^6} \leqslant \sin\frac{k}{n^2} \leqslant \frac{k}{n^2}$$

En passant à la sommation, nous avons :

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n^2} - \frac{k^3}{6n^6}\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n}\sin\left(\frac{k}{n^2}\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}$$

Or, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2} = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{n^2} \times \frac{n(n+1)}{2}$

D'autre part, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{k^3}{6n^6} = \frac{1}{6n^6}\sum_{k=1}^{n} k^3$.

Or, il est connu que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$, et donc, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{k^3}{6n^6} = \frac{n^2(n+1)^2}{24n^6}$, d'où nous obtenons l'encadrement :

$$\frac{n(n+1)}{2n^2} - \frac{n^2(n+1)^2}{24n^6} \leqslant u_n \leqslant \frac{n(n+1)}{2n^2}$$

Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{n(n+1)}{2n^2} = \frac{1}{2}$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2(n+1)^2}{24n^6} = 0$, nous en déduisons, en utilisant les théorèmes de limite par encadrement, que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\sin\left(\frac{k}{n^2}\right) = \frac{1}{2}$

2. Soit $x \in \mathbb{R}$; pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $X_n = \dfrac{[nx]}{n}$ où $[.]$ définit la partie entière. Donner $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} X_n$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}$, nous avons :

$$[nx] \leqslant nx < [nx] + 1$$

Je divise maintenant par n, et j'obtiens :

$$\frac{[nx]}{n} \leqslant x < \frac{[nx]}{n} + \frac{1}{n} \Longleftrightarrow X_n \leqslant x < X_n + \frac{1}{n}$$

Inégalité qui peut être écrite : $x - \dfrac{1}{n} < X_n \leqslant x$.

Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} x - \frac{1}{n} = x$, d'après les limites par encadrement, nous tirons $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} X_n = x$

8.4.11 Théorème

Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite l, et si il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, si $n \geqslant N$ alors $u_n \geqslant a$ Alors $l \geqslant a$

Démonstration

Nous allons faire une démonstration par l'absurde.
Supposons $l < a$ et soit $\varepsilon > 0$
Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = l$, il existe un entier $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$, tel que si $n \geqslant N_\varepsilon$, alors $|u_n - l| < \varepsilon$

En particulier, pour $\varepsilon = \dfrac{a-l}{2}$, si $n \geqslant N_\varepsilon$, alors $\dfrac{-(a-l)}{2} \leqslant u_n - l \leqslant \dfrac{a-l}{2}$, c'est à dire

$$l - \frac{(a-l)}{2} \leqslant u_n \leqslant l + \frac{a-l}{2}$$

c'est à dire : $u_n \leqslant \dfrac{a+l}{2}$
Or, $\dfrac{a+l}{2} < a$, car $l < a$, et $\dfrac{a+l}{2}$ est le milieu de l'intervalle $[l\ a]$
Il y a donc une contradiction avec l'hypothèse $u_n \geqslant a$

Remarque 16 :

1. Le problème est le même si il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, si $n \geqslant N$ alors $u_n \leqslant a$
2. Les inégalités strictes ne sont pas conservées ; par exemple : $\dfrac{1}{n} > 0$, mais, $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n} = 0$

8.4.12 Proposition

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 2 suites convergentes.
Si $u_n \geqslant v_n$ à partir d'un certain rang, alors $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n \geqslant \lim\limits_{n \to +\infty} v_n}$

Remarque 17 :

Ce théorème ne permet, en fait, que de donner une évaluation *(une estimation)* de la limite, sans toutefois la préciser. C'est un grand travail de mathématicien que de savoir donner un ordre de grandeur ; nous y reviendrons.

Démonstration

La démonstration de ce théorème est simple : on crée la suite $w_n = u_n - v_n$, alors, $w_n \geqslant 0$ à partir d'un certain rang ;
comme la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, que sa limite est $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n - \lim\limits_{n \to +\infty} v_n$, et que, d'après le théorème précédent, $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n \geqslant 0$, on a le résultat.

8.4.13 Exercices

Exercice 19 :

1. If $a_n = \dfrac{1}{10} + \dfrac{1}{100} + \cdots + \dfrac{1}{10^n}$, how large must n be for $\dfrac{1}{9} - a_n$ to be less than 10^{-6}
2. If $a_n = \dfrac{7}{10} + \dfrac{7}{100} + \cdots + \dfrac{7}{10^n}$, how large must n be for $\dfrac{7}{9} - a_n$ to be less than 10^{-8}

Exercice 20 :

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, géométrique de premier terme u_0 et de raison $q \in \mathbb{R}$.
On appelle $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$

1. On suppose $|q| < 1$. Donner $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$
2. On suppose $q > 1$. Donner $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$
3. Etudier lorsque $q < -1$, $q = 1$ et $q = -1$

Exercice 21 :

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_n = \dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^2$

1. Quelle est limite de cette suite ?
2. Justifier l'existence d'un entier N_0, tel que si $n > N_0$, alors $\dfrac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{49}{72}$
3. Calculer l'entier N_0

Exercice 22 :

Cet exercice repose sur l'utilisation des <u>*théorèmes classiques des limites, et des limites remarquables*</u>
Donnez les limites suivantes :

1. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\pi+\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)$
2. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{\sin n}{n}$
3. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{\sin^2 n-\cos^2 n}{n^3}$
4. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$
5. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{2n+1}-\sqrt{n}\right)$
6. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{3^n-2^n}{3^n+2^n}$
7. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}(a^n+b^n)$ où $a>0$ et $b>0$

Exercice 23 :

Nous posons $u_2 = 1-\dfrac{1}{2^2}$ et pour tout entier $n \geqslant 3$:

$$u_n = \left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = \prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)$$

Calculer u_n et en déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n$

Exercice 24 :

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par ses deux premiers termes $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ et par la relation, définie pour tout $n\in\mathbb{N}$, par :

$$u_{n+2} = \frac{3}{2}u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n$$

Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$v_n = u_{n+1} - u_n$$

1. Démontrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on donnera la raison et le premier terme. Pour $n\in\mathbb{N}$, calculer v_n en fonction de n
2. En déduire l'expression de u_n en fonction de n, puis $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n$
3. Déterminer le plus petit entier n_0 tel que, pour tout entier $n \geqslant n_0$, nous ayions : $|u_n - 3| < 10^{-5}$

Exercice 25 :

Cet exercice étudie un cas particulier de suite : les suites arithmético-géométriques
Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par son premier terme $u_0\in\mathbb{R}$, et par la relation de récurrence, définie pour tout $n\in\mathbb{N}$, par :

$$u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2$$

1. Etudier le cas où $u_0 = 3$

2. On suppose $u_0 \neq 3$
   Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on définit une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :
   $$(\forall n \in \mathbb{N})\,(v_n = u_n + \alpha)$$
   Montrer qu'il existe une valeur de α pour laquelle la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique
3. Exprimer u_n en fonction de u_0 et de n. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et donner sa limite.

Exercice 26 :

Cet exercice utilise les théorèmes de limites et de majoration ; il utilise aussi un outil de comparaison des termes succesifs d'une suite.
Ce problème apporte des notions du point de vue théorique ; c'est le genre d'exercice qu'il faut rédiger complètement

1. On considère une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à termes positifs tels que : $\dfrac{x_{n+1}}{x_n} \geqslant 2$
   — Montrer que, pour tout $n \geqslant 10$, alors $x_n \geqslant 2^{n-10}x_{10}$; en déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$;
   — Que se passe-t-il si $\dfrac{x_{n+1}}{x_n} \geqslant 2$ seulement lorsque $n \geqslant 17$?
2. On considère maintenant une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à termes positifs tels que : $\dfrac{x_{n+1}}{x_n} \leqslant \dfrac{1}{2}$; donner $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$
3. On considère la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $x_n = \dfrac{(1,1)^n}{n}$, pour $n \neq 0$
   — Evaluer $\dfrac{x_{n+1}}{x_n}$, puis, trouver N_0, tel que, si $n \geqslant N_0$, alors $\dfrac{x_{n+1}}{x_n} \geqslant 1,05$
   — En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$
4. Etudier les suites définies par $x_n = \dfrac{2^n}{n!}$
5. **Généralisation :**
   Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs tels que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = l$
   Montrer que si $l < 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ et que, si $l > 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$
6. **Que se passe-t-il si $l = 1$?** L'objet de cette question est de montrer qu'il est impossible de décider quoi que ce soit lorsque $l = 1$
   (a) On considère la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $a_n = n^3$ donner $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$, puis $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$
   (b) On considère la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $b_n = \dfrac{1}{n^3}$ donner $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n$, puis $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{b_{n+1}}{b_n}$
   (c) On considère la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $c_n = \dfrac{2\,(n+1)\,(n+2)}{n^2}$ donner $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n$, puis $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{c_{n+1}}{c_n}$
   (d) On considère la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_n} = 1$; que dire de $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$?