8.5 Limites infinies

8.5.1 Définition

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique réelle.
On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$, et on écrit $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ si et seulement si
Pour tout $A > 0$, $u_n > A$ à partir d'un certain rang
Autrement dit
Pour tout $A > 0$, il existe $N_A \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $n \geqslant N_A$ alors $u_n > A$

Remarque 18 :

1. Réécrivons la définition de suite qui tend vers $+\infty$, en écriture formalisée :
$$\boxed{(\forall A > 0)\,(\exists N_A \in \mathbb{N})\,(\forall n \in \mathbb{N})\,(n > N_A \Rightarrow u_n > A)}$$
2. On dit alors que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est infiniment grand lorsque n est infiniment grand
3. Pour montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $-\infty$, on utilise une définition semblable :
$$\boxed{(\forall A > 0) \text{ il existe } N_A \in \mathbb{N} \text{ tel que } n \geqslant N_A \Rightarrow u_n \leqslant -A}$$
4. Une suite qui tend vers plus ou moins l'infini est dite **divergente**

Exemple 7 :

Pour $\alpha > 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} n^\alpha = +\infty$

8.5.2 Proposition

Nous avons les résultats suivants :

1. **Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ alors $u_n > 0$ à partir d'un certain rang**
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{u_n} = 0$

Démonstration

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite qui tend vers $+\infty$

1. Démontrons que $u_n > 0$ à partir d'un certain rang
La démonstration peut être considérée comme une relecture de la définition de suite qui tend vers $+\infty$:
Comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite qui tend vers $+\infty$, pour $A = 1$, il existe $N \in \mathbb{N}$, tel que si $n \geqslant N$, alors $u_n \geqslant 1$... Donc, nous avons $u_n > 0$ dès que $n \geqslant N$
2. Démontrons que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{u_n} = 0$
D'après le point précédent, on peut supposer $u_n > 0$, et donc $\dfrac{1}{u_n} > 0$ et est toujours défini.
Soit $\varepsilon > 0$.
Alors $\dfrac{1}{u_n} < \varepsilon \Longleftrightarrow u_n > \dfrac{1}{\varepsilon}$.
Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geqslant N$ alors $u_n > \dfrac{1}{\varepsilon}$, c'est à dire que si $n \geqslant N$, alors $0 < \dfrac{1}{u_n} < \varepsilon$.
Ce qui montre que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{u_n} = 0$

Remarque 19 :

Nous avons les mêmes résultats pour $-\infty$:

1. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ alors $u_n < 0$ à partir d'un certain rang
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{u_n} = 0$

Je propose au lecteur de les démontrer seul, en exercice.

8.5.3 Propriétés des suites qui tendent vers $+\infty$

1. **Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont 2 suites qui tendent vers $+\infty$, alors**
   (a) **Addition :** $(u_n+v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **tend vers** $+\infty$
   (b) **Multiplication :**$(u_nv_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **tend vers** $+\infty$
   (c) **Multiplication par un scalaire :**
      i. $(\forall\lambda>0)\,(\lambda u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **tend vers** $+\infty$
      ii. $(\forall\lambda<0)\,(\lambda u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **tend vers** $-\infty$
2. **Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 2 suites ; si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$, et si il existe $a>0$ tel que $v_n \geqslant a$ à partir d'un certain rang, alors** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_nv_n = +\infty$
3. **Théorème de minoration** [4]**Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 2 suites telles que $u_n \geqslant v_n$ à partir d'un certain rang.**
   Si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$, alors, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

Démonstration

Nous allons utiliser, ici, la définition de suite tendant vers l'infini

1. **Démonstration du premier point**
   (a) *Addition de 2 suites qui tendent vers $+\infty$*
   Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 2 suites qui tendent vers $+\infty$
   On va écrire que les deux suites tendent vers $+\infty$
   Soit $A>0$
   — On écrit que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$
     Il existe $N_A^u \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant N_A^u \Rightarrow u_n \geqslant \dfrac{A}{2}$
   — On écrit que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$
     Il existe $N_A^v \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant N_A^v \Rightarrow v_n \geqslant \dfrac{A}{2}$
   Soit $N = \max\{N_A^u, N_A^v\}$
   Si $n \geqslant N$, alors $n \geqslant N_A^u$ et $n \geqslant N_A^v$, donc, $u_n \geqslant \dfrac{A}{2}$ et $v_n \geqslant \dfrac{A}{2}$; donc, si $n \geqslant N$, alors $u_n+v_n \geqslant A$; donc, $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n+v_n) = +\infty$
   (b) *Multiplication de 2 suites qui tendent vers $+\infty$*
   Soit $A>0$
   Ecrivons, comme d'habitude, que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite qui tend vers $+\infty$
   Il existe donc $N_A \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant N_A \Rightarrow u_n \geqslant \sqrt{A}$
   De même, écrivons que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite qui tend vers $+\infty$
   Il existe $M_a \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant M_a \Rightarrow v_n \geqslant \sqrt{A}$
   Soit donc alors $Q = \max\{N_A, M_a\}$; si $n \geqslant Q$, alors $n \geqslant N_A$ et $n \geqslant M_a$, donc $u_nv_n \geqslant \sqrt{A}\sqrt{A} = A$ et ceci, pour tout $A>0$. Donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_nv_n = +\infty$

4. Appelé aussi : Théorème "pousse au c.."

(c) *Multiplication d'une suite qui tend vers $+\infty$ par un scalaire*

i. Soit $\lambda > 0$; écrivons, une nouvelle fois, que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite qui tend vers $+\infty$

Soit $A > 0$ il existe donc $N_A \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant N_A \Rightarrow u_n \geqslant \dfrac{A}{\lambda}$. Donc, si $n \geqslant N_A$, $\lambda u_n \geqslant A$, ce qui montre que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$

ii. De même, soit $\lambda < 0$; comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite qui tend vers $+\infty$, pour $A > 0$ il existe donc $N_A \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant N_A \Rightarrow u_n \geqslant \dfrac{A}{-\lambda}$. Donc, si $n \geqslant N_A$, $\lambda u_n \leqslant \lambda\dfrac{A}{-\lambda} = -A$; ce qui montre que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$

2. **Démonstration du second point**

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite qui tend vers $+\infty$, et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que $v_n > a > 0$ à partir d'un certain rang N_v.

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, pour $A > 0$ il existe donc $N_A \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant N_A \Rightarrow u_n \geqslant \dfrac{A}{a}$.

Soit $Q = \max\{N_A, N_v\}$; si $n \geqslant Q$, alors $n \geqslant N_A$ et $n \geqslant N_v$, et donc $u_n v_n \geqslant a\dfrac{A}{a} = A$.

Ce qui termine de montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n v_n = +\infty$

3. **Démonstration du troisième point : *Théorème de minoration***

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 2 suites telles que $u_n \geqslant v_n$ à partir d'un certain rang.
Ceci veut donc dire qu'il existe un entier $P \in \mathbb{N}$, tel que si $n \geqslant P$, alors $u_n \geqslant v_n$
Ecrivons que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$; alors, pour $A > 0$ il existe donc $N_A \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant N_A \Rightarrow v_n \geqslant A$.

Comme précédemment, nous posons $Q = \max\{N_A, P\}$; si $n \geqslant Q$, alors $n \geqslant N_A$ et $n \geqslant P$, et donc $u_n \geqslant v_n \geqslant A$; en particulier, $u_n \geqslant A$, ce qui termine de montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

Exercice 27 :

1. Démontrer que si $k > 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} k^n = +\infty$

   Si $k > 1$, il existe $a > 0$ tel que $k = 1 + a$. Donc, $k^n = (1+a)^n \geqslant 1 + na$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 + na = +\infty$, il en est de même de $\lim\limits_{n\to+\infty} k^n = +\infty$

2. En déduire que si $|k| < 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} k^n = 0$

Remarque 20 :

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$, on ne peut rien affirmer de $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + v_n)$; nous sommes devant une indétermination.

Exemples d'indétermination

— Si $u_n = n^2$ et $v_n = \dfrac{1}{n} - n^2$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$, mais comme $u_n + v_n = \dfrac{1}{n}$, nous avons $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n + v_n = 0$

— Autre exemple : si $u_n = n^2$ et $v_n = n - n^2$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$, mais comme $u_n + v_n = n$, nous avons $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n + v_n = +\infty$

— Et, dernier exemple : si $u_n = n^2$ et $v_n = -n^3$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$, mais comme $u_n + v_n = n^2 - n^3$, nous avons $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n + v_n = -\infty$

Nous ne pouvons donc rien décider, et il faut regardr au cas par cas.

8.5.4 Convergence et monotonie

Voici un théorème extrêmement important, d'utilisation courante.
Toute suite croissante et majorée converge

Démonstration

Le point important sur lequel s'appuie la démonstration, est l'axiôme de la borne supérieure vu en 7.4.2 rappelé ci-dessous.

> **Tout sous ensemble de nombres réels,non vide et majoré, admet une borne supérieure**

Cette démonstration n'est pas facile. Bien la comprendre est important
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite numérique, croissante et majorée.
Donc, $\{u_n; n \in \mathbb{N}\}$ est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ non vide et majoré, qui admet donc, d'après 7.4.2, une borne supérieure M.
Soit $M = \sup\{u_n; n \in \mathbb{N}\}$ cette borne supérieure et soit $\varepsilon > 0$ quelconque.
Alors, $M - \varepsilon$ n'est pas un majorant de l'ensemble $\{u_n; n \in \mathbb{N}\}$; il existe donc $N_M \in \mathbb{N}$ tel que $M - \varepsilon \leqslant u_{N_M} \leqslant M$.
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant croissante, nous avons : $n \geqslant N_M \Rightarrow M - \varepsilon \leqslant u_{N_M} \leqslant u_n \leqslant M$.
Donc, $|u_n - M| \leqslant \varepsilon$, c'est à dire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = M$

Remarque 21 :

1. On vient de montrer que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite numérique croissante et majorée, alors elle converge vers sa borne supérieure
2. Donc, si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite numérique décroissante et minorée, alors, elle converge vers sa borne inférieure
3. Une suite peut etre convergente sans être croissante ou décroissante.

   Exemple : $\dfrac{(-1)^n}{n}$; cette suite converge vers zéro, mais n'est ni croissante, ni décroissante.
4. Une suite peut etre bornée *(majorée, entre autres)* sans toutefois être convergente.

   Exemples : $u_n = \sin\dfrac{n\pi}{6}$ ou $v_n = (-1)^n$,
5. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique croissante. Si elle est convergente, alors elle est bornée.
   En prenant la contrapposée, si elle est non bornée, alors elle est divergente : c'est ce que précise le corollaire suivant.

   (En fait, toute suite convergente est bornée ; les corollaires qui suivent précisent en fait cette divergence)

8.5.5 Corollaire

1. **Une suite croissante et non majorée diverge vers $+\infty$**
2. **Une suite décroissante et non minorée diverge vers $-\infty$**

Démonstration

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique croissante et non majorée.
   Alors, soit $A > 0$
   $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'étant pas une suite majorée, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_N > A$
   $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant croissante, nous avons l'implication : $n > N \Rightarrow u_n > u_N > A$
   Donc, pour tout $A > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $n > N \Rightarrow u_n > A$.
   Donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$
2. La démonstration du second point est exactement la même

Exercice 28 :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par : $u_0 = 0$, et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{6+u_n}$

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée par 3. Qu'en déduire ?
   - On montre tout d'abord que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive et minorée par 3.
     Cette démonstration se fait par récurrence.
     On appelle $P(n)$ la propriété : $P(n)$: $\quad 0 \leqslant u_n \leqslant 3$
     - $P(0)$ est évidemment vraie
     - Supposons que $P(n)$ soit vraie
     - Démontrons que $P(n+1)$ est vraie.
       Tout d'abord, comme $u_{n+1} = \sqrt{6+u_n}$, nous avons bien $u_{n+1} \geqslant 0$
       De plus, $u_{n+1} - 3 = \sqrt{6+u_n} - 3 = \dfrac{6+u_n-9}{\sqrt{6+u_n}+3} = \dfrac{u_n-3}{\sqrt{6+u_n}+3}$.
       Comme $u_n \leqslant 3, \dfrac{u_n-3}{\sqrt{6+u_n}+3} \leqslant 0$, et donc $u_{n+1} \leqslant 3$, et donc $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant 3$

     Nous venons de montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant 3$
   - On montre tout d'abord que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante
     Nous faisons donc la différence $u_{n+1} - u_n$.
     $$u_{n+1} - u_n = \sqrt{6+u_n} - u_n = \frac{6+u_n-u_n^2}{\sqrt{6+u_n}+u_n} = \frac{(2+u_n)(3-u_n)}{\sqrt{6+u_n}+u_n}$$
     Comme $\dfrac{(2+u_n)}{\sqrt{6+u_n}+u_n} > 0$, le signe de $u_{n+1}-u_n$ ne dépend que de celui de $3-u_n$. Donc,$u_{n+1}-u_n \geqslant 0$ et la suite est donc croissante
   - $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant une suite coissante et majorée, elle est donc convergente.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $3 - u_{n+1} \leqslant \dfrac{3-u_n}{3}$

   Il suffit de faire les calculs ! !
   $3 - u_{n+1} = 3 - \sqrt{6+u_n} = \dfrac{9-6-u_n}{3+\sqrt{6+u_n}} = \dfrac{3-u_n}{3+\sqrt{6+u_n}}$
   Or, $3 \leqslant 3 + \sqrt{6+u_n}$ et donc $\dfrac{3-u_n}{3+\sqrt{6+u_n}} \leqslant \dfrac{3-u_n}{3}$.
   Nous avons donc $3 - u_{n+1} \leqslant \dfrac{3-u_n}{3}$
3. En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

   En utilisant les méthodes de l'exercice 8.4.4, nous pouvons écrire que $0 \leqslant 3 - u_n \leqslant \dfrac{3-u_0}{3^n}$, et donc que $\lim\limits_{n\to+\infty} 3 - u_n = 0$
   On en déduit donc que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 3$

8.5.6 Quelques exercices

Exercice 29 :

Questions sur le cours

Voilà quelques réflexions qu'il est bon de se faire pour s'assurer de la compréhension du cours.

1. Le produit de deux suites croissantes est-il une suite croissante ? *(Que pensez vous des suites $u_n = -\dfrac{1}{n^3}$ ou $v_n = -1 - \dfrac{1}{n}$ et du produit $u_n v_n$?)*
2. Une suite positive, qui converge vers 0 est-elle décroissante ? *(Que pensez vous de la suite $\dfrac{2+(-1)^n}{n}$?)*
3. Une suite croissante, négative, converge-t-elle vers 0 ?
4. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée, et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite qui converge vers l ; la suite $(u_n v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente ? *(Que pensez vous des suite $u_n = (-1)^n$ et $v_n = \dfrac{n+(-1)^n}{n+1}$?)*
5. La suite de terme général $u_n = \dfrac{n^4+2}{1+(-1)^n n^4}$ est-elle convergente ?

Exercice 30 :

Les suites suivantes sont-elles bornées ? Convergentes ? Non bornées ? Divergentes ?

1. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ où $u_n = \left(\dfrac{1+\sin n}{n}\right)$
2. La suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ où $w_n = n\left(1 + n\sin\left(\dfrac{n\pi}{2}\right)\right)$

Exercice 31 :

Etudier la monotonie, et éventuellement la convergence des suites suivantes *(on ne demande pas la limite)*

1. $U_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{kn}$
2. $V_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k}$
3. $W_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$

Exercice 32 :

Montrer que la suite $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k$ est bornée sans être convergente.

Exercice 33 :

1. Montrer que pour $k = 2, \ldots, n$, nous avons : $\dfrac{1}{k^2} \leqslant \dfrac{1}{k(k-1)}$
2. On considère la suite $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$; montrer qu'elle est croissante et majorée.
3. Conclusion ?