8.6 Equivalences de suites

Dans ce paragraphe, nous allons « survoler » la notion de suite équivalente. Cette notion entre dans ce qu'on peut appeler les notions de comparaison, d'ordre de grandeur. Il sera bon de bien comprendre ce paragraphe, et d'en connaitre les subtilités. Nous retrouverons la notion d'équivalence tout au long des cours d'analyse.

8.6.1 Equivalence de suites

Deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, non nulles et de même signe à partir d'un certain rang, sont dites équivalentes en $+\infty$, et on écrit :

$$\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\approx} v_n}$$

Si et seulement si $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 1$

Remarque 22 :

La condition $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 1$ est équivalente à la condition :
Il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ et une suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendant vers zéro, telle que si $n > N_0$, alors $u_n - v_n = \varepsilon_n v_n$, ou ce qui est équivalent, $u_n = (1+\varepsilon_n)\, v_n$

En effet, supposons que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 1$

Ceci veut donc dire, que nous avons $\dfrac{u_n}{v_n} = 1 + \varepsilon_n$ avec $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$; en fait, donc, nous pouvons conclure que $u_n = v_n\,(1+\varepsilon_n)$, au moins à partir d'un certain rang

8.6.2 Théorème

$E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est l'ensemble des suites numériques réelles.
Dans $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, la relation $u_n \approx v_n$ est une relation d'équivalence

Démonstration

Montrons que c'est une relation d'équivalence

Réflexivité Evidemment, on a $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \approx (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$; il suffit de prendre pour $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite nulle.

Symétrie Supposons $u_n \approx v_n$; il faut donc montrer que $v_n \approx u_n$

A partir d'un certain rang N_0 , nous avons $u_n = (1+\varepsilon_n)\, v_n$, et donc $v_n = \left(\dfrac{1}{1+\varepsilon_n}\right) u_n$, ou encore, $v_n = \left(1 - \dfrac{\varepsilon_n}{1+\varepsilon_n}\right) u_n$; si nous posons $\varepsilon'_n = \dfrac{-\varepsilon_n}{1+\varepsilon_n}$, nous avons : $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon'_n = 0$,et donc $v_n \approx u_n$

Transitivité Supposons $u_n \approx v_n$ et $v_n \approx w_n$; il faut donc démontrer que $u_n \approx w_n$

Il existe donc un entier N_0 tel que si $n \geqslant N_0$, alors, $u_n = (1+\varepsilon_n)\, v_n$

De même, il existe N_1 tel que, si $n \geqslant N_1$, alors, $v_n = (1+\varepsilon'_n)\, w_n$

Donc, pour $n \geqslant \max(N_0, N_1)$, nous avons $u_n = (1+\varepsilon_n)\, v_n$ et $v_n = (1+\varepsilon'_n)\, w_n$, et, dès ce moment, $u_n v_n = (1+\varepsilon_n)(1+\varepsilon'_n)\, u_n$. En posant $\varepsilon''_n = \varepsilon_n(1+\varepsilon'_n) + \varepsilon'_n$, on a bien $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon''_n = 0$

On a donc $u_n \approx w_n$

8.6.3 Propriété importante

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, non nulles et de même signe à partir d'un certain rang, telles que $u_n \underset{+\infty}{\approx} v_n$
Alors, pour tout $A > 0$, et tout $B > 0$ il existe N, entier positif tel que

$$n > N \Longrightarrow A\,|v_n| \leqslant |u_n| \leqslant B\,|v_n|$$

Démonstration

Comme $u_n \underset{+\infty}{\approx} v_n$, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geqslant N_1$, alors $u_n = (1+\varepsilon_n)\, v_n$ où $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite qui tend vers zéro.
Cette suite tendant vers zéro, pour tout $\lambda > 0$, il existe $K_\lambda \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geqslant K_\lambda$, $|\varepsilon_n| \leqslant \lambda$
Nous avons donc, pour $n \geqslant N_1$ et $n \geqslant K_\lambda$,

$$|u_n| = |(1+\varepsilon_n)\, v_n| = |(1+\varepsilon_n)|\, |v_n| \leqslant (1+|\varepsilon_n|)\, |v_n| \leqslant (1+\lambda)\, |v_n|$$

En posant $B = (1+\lambda)$, nous avons la première inégalité
De la même manière, comme $u_n \underset{+\infty}{\approx} v_n$, il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geqslant N_2$, alors $v_n = \left(1+\varepsilon_n^1\right) u_n$ où $\left(\varepsilon_n^1\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite qui tend vers zéro.
Cette suite tendant vers zéro, pour tout $\lambda_1 > 0$, il existe $K_{\lambda_1} \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geqslant K_{\lambda_1}$, $\left|\varepsilon_n^1\right| \leqslant \lambda_1$
Nous avons donc, pour $n \geqslant N_2$ et $n \geqslant K_{\lambda_1}$,

$$|v_n| = \left|\left(1+\varepsilon_n^1\right) u_n\right| = \left|\left(1+\varepsilon_n^1\right)\right| |u_n| \leqslant \left(1+\left|\varepsilon_n^1\right|\right) |u_n| \leqslant (1+\lambda_1)\, |u_n|$$

En posant $\alpha = (1+\lambda_1)$, nous avons donc $|v_n| \leqslant \alpha\, |u_n| \Longleftrightarrow \dfrac{1}{\alpha} |v_n| \leqslant |u_n|$
En posant $A = \dfrac{1}{\alpha}$, nous avons la seconde inégalité.
Ainsi, si $N = \max\{N_1, N_2, K_\lambda, K_{\lambda_1}\}$, si $n \geqslant N$, alors $A\,|v_n| \leqslant |u_n| \leqslant B\,|v_n|$

Remarque 23 :

1. Nous avons aussi, si $u_n \underset{+\infty}{\approx} v_n$, alors $A\,|u_n| \leqslant |v_n| \leqslant B\,|u_n|$, à partir d'un certain rang N
2. Ces inégalités montrent la relation "forte" qu'est l'équivalence des suites.
   De plus, avec ces inégalités, on voit que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s'annule à partir d'un certain rang, il en est de même de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et réciproquement !
3. Si $u_n \underset{+\infty}{\approx} v_n$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l$, alors, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$, même si $\lim\limits_{n\to+\infty} = \infty$.
   On en conclue donc que, **dans une recherche d'existence ou de valeur de la limite, on peut remplacer une suite, par une autre suite équivalente**

8.6.4 Proposition

Soit $P(n) = a_p n^p + a_{p-1} n^{p-1} + \cdots + a_0$ avec $a_p \neq 0$. Alors, en $+\infty$, $P(n) \underset{+\infty}{\approx} a_p n^p$.
Ceci se résume par la phrase suivante :
En $+\infty$, un polynôme tend comme son terme de plus haut degré.

Démonstration

Soit donc $P(n) = a_p n^p + a_{p-1} n^{p-1} + \cdots + a_0$ avec $a_p \neq 0$.
Factorisons par le terme de plus haut degré $a_p n^p$:

$$P(n) = a_p n^p \left(1 + \frac{a_{p-1}}{a_p}\frac{1}{n} + \cdots + \frac{a_k}{a_p}\frac{1}{n^{p-k}} + \cdots + \frac{a_0}{a_p}\frac{1}{n^p}\right) \Longleftrightarrow \frac{P(n)}{n^p} = 1 + \frac{a_{p-1}}{a_p}\frac{1}{n} + \cdots + \frac{a_k}{a_p}\frac{1}{n^{p-k}} + \cdots + \frac{a_0}{a_p}\frac{1}{n^p}$$

Pour $k = 0, \cdots, p-1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_k}{a_p}\dfrac{1}{n^{p-k}} = 0$, et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 + \dfrac{a_{p-1}}{a_p}\dfrac{1}{n} + \cdots + \dfrac{a_k}{a_p}\dfrac{1}{n^{p-k}} + \cdots + \dfrac{a_0}{a_p}\dfrac{1}{n^p} = 1$,
c'est à dire $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{P(n)}{n^p} = 1$
Donc $P(n) \underset{+\infty}{\approx} a_p n^p$

Exemple 8 :

$125n^{258} + n^7\sqrt{\pi} + n^2 + 1 \underset{+\infty}{\approx} 125n^{258}$

8.6.5 Proposition : Règles de calcul sur les suites équivalentes

1. **Si $u_n^1 \underset{+\infty}{\approx} u_n^2$ et si $v_n^1 \underset{+\infty}{\approx} v_n^2$, alors $u_n^1 v_n^1 \underset{+\infty}{\approx} u_n^2 v_n^2$**
2. **Si $u_n \underset{+\infty}{\approx} v_n$ et si u_n et v_n ne s'annulent pas, alors $\dfrac{1}{u_n} \underset{+\infty}{\approx} \dfrac{1}{v_n}$**
3. **Conséquence : Si $u_n^1 \underset{+\infty}{\approx} u_n^2$ et si $v_n^1 \approx v_n^2$, et si u_n^2 et v_n^2 ne s'annulent pas, alors $\dfrac{u_n^1}{u_n^2} \underset{+\infty}{\approx} \dfrac{v_n^1}{v_n^2}$**

Démonstration

1. *Démonstration du premier point*
   Supposons $u_n^1 \underset{+\infty}{\approx} u_n^2$ et $v_n^1 \underset{+\infty}{\approx} v_n^2$, alors, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n^1}{u_n^2} = 1$, et, de même, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{v_n^1}{v_n^2} = 1$, ce qui montre que, en utilisant le produit des limites, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n^1 v_n^1}{u_n^2 v_n^2} = 1$, c'est à dire $u_n^1 v_n^1 \underset{+\infty}{\approx} u_n^2 v_n^2$
2. *Démonstration du second point*
   Il existe donc un entier N_0 tel que si $n \geqslant N_0$, alors, $u_n = (1+\varepsilon_n)\, v_n$, donc, si $n \geqslant N_0$
   $\dfrac{1}{u_n} = \dfrac{1}{(1+\varepsilon_n)\, v_n} = \dfrac{1}{(1+\varepsilon_n)} \times \dfrac{1}{v_n}$;
   Or, $\dfrac{1}{(1+\varepsilon_n)} = 1 - \dfrac{\varepsilon_n}{(1+\varepsilon_n)}$; en posant $E_n = -\dfrac{\varepsilon_n}{(1+\varepsilon_n)}$, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} E_n = 0$ et
   $\dfrac{1}{u_n} = (1+E_n)\dfrac{1}{v_n}$ donc $\dfrac{1}{u_n} \approx \dfrac{1}{v_n}$
3. *Démonstration du troisième point*
   Le troisième point est une synthèse des 2 points précédents.

Exemple 9 :

L'exemple type est la question posée par le rapport de deux polynômes.
Si $u_n = \dfrac{P(n)}{Q(n)} = \dfrac{a_k n^k + \ldots + a_0}{b_j n^j + \ldots + b_0}$, comme nous avons $P(n) \underset{+\infty}{\approx} a_k n^k$ et $Q(n) \underset{+\infty}{\approx} b_j n^j$, nous avons $u_n \underset{+\infty}{\approx} \dfrac{a_k n^k}{b_j n^j}$, c'est à dire : $u_n \underset{+\infty}{\approx} \dfrac{a_k}{b_j} n^{k-j}$

Exercice 34 :

1. En utilisant les équivalents, calculer la limite suivante : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2 + 2n\sin n + 1}{2n^2 + 3n + 1}$
   - ▷ Nous avons clairement, d'après 8.6.4 $2n^2 + 3n + 1 \underset{+\infty}{\approx} 2n^2$.
   - ▷ Démontrons que $n^2 + 2n\sin n + 1 \underset{+\infty}{\approx} n^2$
     Il suffit de factoriser par le terme « qui tend le plus rapidement vers $+\infty$ » :
     $$n^2 + 2n\sin n + 1 = n^2\left(1 + 2\frac{\sin n}{n} + \frac{1}{n^2}\right) \iff \frac{n^2 + 2n\sin n + 1}{n^2} = 1 + 2\frac{\sin n}{n} + \frac{1}{n^2}$$
     Comme, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sin n}{n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^2} = 0$, nous avons $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2 + 2n\sin n + 1}{n^2} = 1$ et donc $n^2 + 2n\sin n + 1 \underset{+\infty}{\approx} n^2$

$\triangleright$ En utilisant les résultats de 8.6.5, nous avons :

$$\frac{n^2+2n\sin n+1}{2n^2+3n+1} \underset{+\infty}{\approx} \frac{n^2}{2n^2}$$

Donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2+2n\sin n+1}{2n^2+3n+1} = \dfrac{1}{2}$

2. Montrer que si $\alpha \in \mathbb{R}$ et que si $u_n \underset{+\infty}{\approx} v_n$, alors $(u_n)^\alpha \underset{+\infty}{\approx} (v_n)^\alpha$

   Rien de plus simple. Par hypothèse, nous avons $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 1$, donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)^\alpha = 1$, c'est à dire $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n^\alpha}{v_n^\alpha} = 1$

3. On appelle $u_n^1 = n^3+4n^2$, $u_n^2 = n^3+1$, $v_n^1 = -n^3+\dfrac{1}{n}$, $v_n^2 = -n^3+2n$. Montrer que l'on a $u_n^1 \underset{+\infty}{\approx} u_n^2$, $v_n^1 \underset{+\infty}{\approx} v_n^2$, mais pas $u_n^1+v_n^1 \underset{+\infty}{\approx} u_n^2+v_n^2$

   Il suffit de remarquer que $u_n^1+v_n^1 = 4n^2+\dfrac{1}{n}$ et que $u_n^2+v_n^2 = 2n+1$.

   Donc, $u_n^1+v_n^1 \underset{+\infty}{\approx} 4n^2$ et $u_n^2+v_n^2 \underset{+\infty}{\approx} 2n$

4. Avons nous $e^{n^3+4n^2} \underset{+\infty}{\approx} e^{n^3+1}$?

   Il suffit de faire le rapport $\dfrac{e^{n^3+4n^2}}{e^{n^3+1}} = e^{4n^2-1}$ qui ne tend pas vers 1 lorsque n tend vers l'infini !

Remarque 24 :

On ne fait pas ce qu'on veut avec les équivalents *(par exemple additionner, prendre l'exponentielle ou le logarithme)* il faut, le plus souvent, revenir à la définition.