## 8.7 Problèmes

**Exercice 35 :**

1. On pose $u = 2 + \sqrt{5}$ et $v = 2 - \sqrt{5}$
   (a) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut écrire $u^n = a_n + b_n\sqrt{5}$ et $v^n = a_n - b_n\sqrt{5}$ où $a_n \in \mathbb{N}$ et $b_n \in \mathbb{N}$
   (b) Exprimer $a_{n+1}$ et $b_{n+1}$ en fonction de $a_n$ et $b_n$
   (c) Calculer $a_n$ et $b_n$ pour $0 \leqslant n \leqslant 5$
2. Exprimer :
   (a) $a_n^2 - 5b_n^2$ et $a_nb_{n-1} - a_{n-1}b_n$ en fonction de $n$
   (b) $b_{n+1}$ en fonction de $b_n$ et $b_{n-1}$
   (c) $a_{n+1}$ en fonction de $a_n$ et $a_{n-1}$
3. (a) Montrer que, pour $n \geqslant 1$, $a_n \geqslant 2^n$
   (b) De même, montrer que, pour $n \geqslant 2$, $b_n \geqslant 2^{n-1}$
   (c) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n$
4. En exprimant $a_n$ et $b_n$ en fonction de $u^n$ et $v^n$, étudier :

   (a) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_n}{b_n}$ (b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ (c) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{b_{n+1}}{b_n}$

**Exercice 36 :**

*Ce problème est l'étude d'un algorithme très connu, vieux d'il y à près de 4000 ans, utilisé par les sumériens. Il est parfois connu sous le nom* ***d'algorithme de Babylone***

1. $a$ est un réel strictement positif donné. On définit une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par son premier terme $u_0 > 0$ et par la relation, vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ :

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right)$$

   (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ , $u_n > 0$ ; pour quelles valeurs de $a$, avons nous la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ constante ?
   (b) Dans la suite du problème, on suppose $(u_0)^2 - a \neq 0$
      i. Démontrer les relations suivantes :
         — Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - \sqrt{a} = \dfrac{1}{2u_n}\left(u_n - \sqrt{a}\right)^2$
         — Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} + \sqrt{a} = \dfrac{1}{2u_n}\left(u_n + \sqrt{a}\right)^2$
      ii. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante pour $n \geqslant 1$
      iii. En déduire que cette suite admet une limite
   (c) On définit la suite réelle $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par la relation, vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ :

$$v_n = \frac{u_n - \sqrt{a}}{u_n + \sqrt{a}}$$

      i. Calculez $v_{n+1}$ en fonction de $v_n$
      ii. Calculez $v_{n+1}$ en fonction de $v_1$ et de $n$, et en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$
   (d) Trouver $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$
2. On fixe, dans cette partie $u_0 = 2$ et $a = 2$
   (a) Calculer $u_1$, $u_2$ et $u_3$, *(laisser sous forme de fraction)*

(b) Montrer que $0 < u_1 - \sqrt{2} < 10^{-1}$ ; en déduire que $0 < u_2 - \sqrt{2} < \dfrac{1}{3}10^{-2}$

(c) Trouver une majoration de l'erreur commise en prenant $u_3$, comme valeur approchée de $\sqrt{2}$

3. A partir de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie dans la partie l, on construit la n-ième erreur relative :

$$\varepsilon_n = \frac{|u_n - \sqrt{a}|}{\sqrt{a}} \iff \left|u_n - \sqrt{a}\right| = \varepsilon_n \sqrt{a}$$

(a) Montrer que $\varepsilon_{n+1} = \dfrac{(\varepsilon_n)^2}{2(1+\varepsilon_n)}$ et que $\varepsilon_{n+1} < \dfrac{(\varepsilon_0)^{2n}}{2^{n+1}}$

(b) Montrer que si $\varepsilon_n < 10^{-p}$, alors $\varepsilon_{n+1} < \dfrac{10^{-2p}}{2}$

*Ceci veut dire que lorsque l'on calcule $u_n$ en faisant le calcul une fois de plus, on* ***double la précision****.L'algorithme de calcul décrit dans la partie 1 est un algorithme très puissant de calcul d'une racine carrée d'un nombre positif.*

**Exercice 37 :**

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est telle que pour tout entier $n \geqslant 2$ :

$$(n+1)^2 u_{n+1} - (n-1)^2 u_n + n = 0 \tag{8.1}$$

1. Montrer qu'il existe un nombre réel $k$ tel que, si nous posons $v_n = u_n - k$, alors, pour tout $n \geqslant 2$, nous avons :
$$(n+1)^2 v_{n+1} - (n-1)^2 v_n = 0$$
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $v_n = \dfrac{4v_2}{n^2(n-1)^2}$
3. En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$
4. Si l'égalité (8.1) est vraie aussi pour $n = 1$, que pouvons nous dire de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ?

**Exercice 38 :**

On appelle $\mathcal{E}$ l'ensemble des suites numériques $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont le terme général $u_n$ vérifie, pour tout $n \in \mathbb{N}$ :

$$4u_{n+2} - 4u_{n+1} + u_n = 0$$

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de premier terme $u_0 \neq 0$ et de raison $q \neq 0$.

   Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à $\mathcal{E}$ si et seulement si $q = \dfrac{1}{2}$
2. Montrer qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à $\mathcal{E}$ si et seulement si la suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $\lambda_n = 2^n u_n$ est une suite arithmétique
3. En déduire que $\mathcal{E}$ est l'ensemble des suites numériques $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont le terme général $u_n$ s'écrit $u_n = (an+b)\,2^{-n}$ où $a$ et $b$ sont 2 nombres réels arbitraires ; faire le lien avec la question 1
4. (a) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2 \Longrightarrow 2^n > \mathrm{C}_n^2 = \dbinom{n}{2}$

   (b) En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{2^n}$

   (c) Déterminer, si elle existe, la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $u_n = (an+b)\,2^{-n}$ où $a$ et $b$ sont 2 nombres réels arbitraires.
5. On appelle $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$. Donner $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n$

**Exercice 39 :**

*L'objet de ce problème est* ***l'approximation décimale d'un nombre réel****. Par exemple, une calculatrice, un ordinateur ne présentent à l'utilisateur que des décimaux : est-ce justifié ? L'approximation est-elle suffisante ? Pouvons nous approcher le réel aussi proche que l'on souhaite ?*
Soit $x \in \mathbb{R}$ ; on rappelle que la partie entière de $x$ est l'unique entier relatif $\mathrm{E}(x) = [x]$ tel que

$$[x] \leqslant x < [x] + 1$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, $10^{-n}[10^n x] \leqslant x < 10^{-n}[10^n x] + 10^{-n}$
2. On appelle $u_n = 10^{-n}[10^n x]$ et $v_n = u_n + 10^{-n}$ ; montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = x$
3. On construit la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $a_0 = 0$ et $a_n = 10^n(u_n - u_{n-1})$ ; montrer que $a_n \in \mathbb{Z}$
4. En utilisant l'inégalité $u_n \leqslant x < u_n + 10^{-n}$, montrer que $-1 < a_n < 10$, et que $a_n$ ne peut donc prendre que 10 valeurs à préciser
5. Pour $n \geq 1$, démontrer que $u_n = \displaystyle\sum_{p=1}^{n} a_p 10^{-p} + u_0$

**Exercice 40 :**

*Cet exercice est connu sous le nom de* ***lemme de Kronecker***
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de nombres réels strictement positifs tels que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

$(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{y_k}{u_k}$ existe

1. On pose $v_n = u_n - u_{n-1}$ et $z_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{y_k}{u_k}$.

   Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} y_k = \sum_{k=1}^{n} v_k (z_n - z_{k-1})$
2. Montrer que, pour $p < n$,

$$\left|\sum_{k=1}^{n} y_k\right| \leqslant \left|\sum_{k=1}^{p} v_k (z_n - z_{k-1})\right| + M \sum_{k=p+1}^{n} v_k$$

   Où $M = \sup\limits_{p+1\leqslant k\leqslant n} |z_n - z_{k-1}|$
3. En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{u_n} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} y_k = 0$

**Exercice 41 :**

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par :

$$x_0 = 2 \quad x_1 = 3 \text{ et pour } n \geqslant 0 \qquad x_{n+2} = \frac{x_n + x_{n+1}}{2}$$

Il faut montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et en donner la limite