8.8 Quelques exercices corrigés

8.8.1 Suites arithmétiques et géométriques

Exercice 8 :

Soit $u_n = \frac{2}{5}u_{n-1}+\frac{1}{5}$. Calculer α pour que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_n = u_n-\alpha$ soit une suite géométrique.

Nous allons essayer d'exprimer v_{n+1} en fonction de v_n.

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1}-\alpha \\ &= \frac{2}{5}u_n+\frac{1}{5}-\alpha \\ &= \frac{2}{5}\left(u_n+\frac{1}{2}-\frac{5}{2}\alpha\right) \end{aligned}$$

Si nous avons $\alpha = -\frac{1}{2}+\frac{5}{2}\alpha$, c'est à dire $\alpha = \frac{1}{3}$, nous obtenons $v_{n+1} = \frac{2}{5}v_n$, ce qui montre que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\frac{2}{5}$

De là, nous déduisons que $v_n = \left(\frac{2}{5}\right)^n v_0$, c'est à dire que

$$v_n = \left(\frac{2}{5}\right)^n\left(u_0-\frac{1}{3}\right) \Longleftrightarrow u_n-\frac{1}{3} = \left(\frac{2}{5}\right)^n\left(u_0-\frac{1}{3}\right) \Longleftrightarrow u_n = \left(\frac{2}{5}\right)^n\left(u_0-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{3}$$

Cette expression montre que :

- Si $u_0 = \frac{1}{3}$, alors, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante
- Et, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{3}$

Exercice 9 :

On définit une suite récurrente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par la donnée de u_0 et la condition suivante :

$$\forall n\in\mathbb{N}\quad n\geq 1\quad u_{n+1} = \frac{5u_n+3}{u_n+3}$$

1. *On pose $v_n = \dfrac{u_n-3}{u_n+1}$*

   (a) *Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique ; en préciser la raison.*

   Il faut donc écrire v_{n+1} en fonction de v_n

   $$v_{n+1} = \frac{u_{n+1}-3}{u_{n+1}+1} = \frac{\frac{5u_n+3}{u_n+3}-3}{\frac{5u_n+3}{u_n+3}+1} = \frac{5u_n+3-3u_n-9}{5u_n+3+u_n+3} = \frac{2u_n-6}{6u_n+6} = \frac{1}{3}\times\frac{u_n-3}{u_n+1} = \frac{1}{3}v_n$$

   La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc géométrique de raison $\frac{1}{3}$ et de premier termer $v_0 = \frac{u_0-3}{u_0+1}$.

   (b) *Calculer v_n en fonction de u_0 et de n*

   Classiquement, $v_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n v_0 = \left(\frac{1}{3}\right)^n\left(\frac{u_0-3}{u_0+1}\right)$

   Nous allons aller plus loin que la question posée. De l'expression $v_n = \frac{u_n-3}{u_n+1}$, nous déduisons $u_n = \frac{v_n+3}{1-v_n}$, c'est à dire :

   $$u_n = \frac{3^{-n}(u_0-3)+3(u_0+1)}{-3^{-n}(u_0-3)+(u_0+1)}$$

2. *Etudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans les cas suivants :*

   (a) $u_0 = 3$

   Si $u_0 = 3$, d'après l'expression trouvée dans la question précédente, nous avons $u_n = 3$ pour tout $n \in \mathbb{N}$; chose qui aurait aussi être démontrée par une récurrence ultra-simple en utilisant la définition de u_n

   (b) $u_0 = -1$

   Il semble difficile d'utiliser le résultat trouvé dans la question 2, puisque v_n n'est pas définie dès v_1 ! !
   Or, si $u_{n+1} = \dfrac{5u_n + 3}{u_n + 3}$, alors $u_1 = -1$, et, par une même récurrence ultra simple, on montre que $u_n = -1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   Mais, miracle des mathématiques, en remplaçant u_0 par -1 dans l'expression $u_n = \dfrac{3^{-n}(u_0 - 3) + 3(u_0 + 1)}{-3^{-n}(u_0 - 3) + (u_0 + 1)}$, on trouve aussi que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = -1$.
   Donc, si $u_0 = -1$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante

   (c) $u_0 = 4$

   Si $u_0 = 4$, alors $u_n = \dfrac{3^{-n} + 15}{-3^{-n} + 5}$, et on voit que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +3$

   On démontrerait, facilement, que si $u_0 \neq -1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +3$

Exercice 10 :

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\begin{cases} u_1 = \dfrac{1}{3} \\ u_{n+1} = \dfrac{n+1}{3n} u_n \end{cases}$$

1. *Montrer que la suite de terme général $v_n = \dfrac{u_n}{n}$ est une suite géométrique*

   Comme toujours, il faut exprimer v_{n+1} en fonction de v_n :

$$v_n = \frac{u_{n+1}}{n+1} = \frac{1}{n+1}\left(\frac{n+1}{3n}u_n\right) = \frac{1}{3n}u_n = \frac{1}{3}\frac{u_n}{n} = \frac{1}{3}v_n$$

   $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{3}$. Nous avons donc $v_n = \left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1} v_1$. Comme $v_1 = u_1 = \dfrac{1}{3}$, nous avons

$$v_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n = 3^{-n}$$

2. *En déduire une formule explicite de u_n*

   De la définition de $v_n = \dfrac{u_n}{n}$, nous tirons $u_n = nv_n = n3^{-n}$

3. *Donner $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$*

   On peut démontrer par récurrence que pour $n \geqslant 1$, $n < 2^n$, et donc $u_n < 2^n \times 3^{-n} = \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$

   Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n = 0$, nous en déduisons que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

Exercice 11 :

On considère une suite double $(x_{i,j})_{i\in\mathbb{N},j\in\mathbb{N}}$ de réels positifs. On peut représenter ces réels sous forme de matrice infinie, dans lequel i désigne le numéro de la ligne, et j celui de la colonne. On suppose que ces réels sont tels que :

$$\begin{cases} x_{i,j+1} - x_{i,j} = l_i \\ x_{i+1,j} = q x_{i,j} \end{cases}$$

C'est à dire que les réels disposés en ligne, sur la ligne numéro i, forment une suite arithmétique de raison l_i (la raison dépend de la ligne), *alors que les nombres disposés en colonne forment une suite géométrique de raison q, q étant constant. Démontrer que, pour tout $i \in \mathbb{N}$ et tout $j \in \mathbb{N}$, nous avons :*

$$x_{i,j} = q^{i-1}\left[x_{1,1} + (j-1)\, l_1\right]$$

montrant ainsi que les termes q, l_1 et $x_{1,1}$ définissent complètement cette suite double

Nous allons partir de la première ligne ; cette première ligne faisant une suite arithmétique de raison l_1, nous avons :

$$x_{1,j} = x_{i,1} + (j-1)\, l_1$$

Passant d'une ligne à une autre, nous avons une suite géométrique de raisons q. Donc, $x_{i,j} = q^{i-1} x_{1,j}$. Donc :

$$x_{i,j} = q^{i-1}\left[x_{1,1} + (j-1)\, l_1\right]$$

8.8.2 Limite d'une suite

Exercice 18 :

Voici un exercice qui pourrait contribuer à l'amitié entre les peuples, si tant est, qu'un jour, nous pourrions nous lier d'amitié avec l'Anglais *(la Perfide Albion)*

If $a_n = \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \cdots + \frac{1}{10^n}$, how large must n be for $\frac{1}{9} - a_n$ to be less than 10^{-6}

La première question qu'il est possible de poser est : qu'est que a_n ?... a_n est simplement la somme des termes d'une suite géométrque de raison $\frac{1}{10}$ et donc,

$$a_n = \frac{\frac{1}{10}\left(1 - \left(\frac{1}{10}\right)^n\right)}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{10}{9} \times \frac{1}{10}\left(1 - \left(\frac{1}{10}\right)^n\right) = \frac{1}{9}\left(1 - \left(\frac{1}{10}\right)^n\right)$$

Comme $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^n = 0$, nous avons $\lim_{n\to+\infty} a_n = \frac{1}{9}$

La différence $\frac{1}{9} - a_n$ est donnée par : $\frac{1}{9} - a_n = \frac{1}{9} \times \left(\frac{1}{10}\right)^n$; il faut donc trouver $n \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{1}{9} \times \left(\frac{1}{10}\right)^n \leqslant 10^{-6}$. On trouve $n \geqslant 6$

Exercice 19 :

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, géométrique de premier terme u_0 et de raison $q \in \mathbb{R}$.

On appelle $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$

1. *On suppose $|q| < 1$. Donner $\lim_{n\to+\infty} S_n$*

   D'après le cours, $S_n = \frac{u_0\left(1 - q^{n+1}\right)}{1-q}$

   Comme $|q| < 1$, nous avons $\lim_{n\to+\infty} q^{n+1} = 0$, et donc $\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{u_0}{1-q}$

Nous avons donc le résultat important :

$$\boxed{\text{Si } |q| < 1 \text{ alors } \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \lambda q^k = \frac{\lambda}{1-q}}$$

2. *On suppose $q > 1$. Donner $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$*

   Au contraire, cette fois ci, comme $q > 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$, et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\left(1-q^{n+1}\right)}{1-q} = +\infty$

   Nous concluons donc :

   $$\boxed{\text{Si } q > 1 \text{ alors } \lim_{n\to+\infty} S_n = \text{signe}\,(u_0)\,\infty}$$

3. *Cas particuliers*

   (a) $q < -1$

   Nous avons toujours $S_n = \dfrac{u_0\left(1-q^{n+1}\right)}{1-q}$.

   Or, $\lim q^{2n} = +\infty$, alors que $\lim q^{2n+1} = -\infty$, ce qui montre que S_n n'admet pas de limite, et, surtout, n'est pas bornée.

   (b) $q = 1$

   C'est le plus simple. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons $u_n = u_0$ et donc $S_n = (n+1)\,u_0$

   Donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \text{signe}\,(u_0)\,\infty$

   (c) $q = -1$

   Pour $q = -1$, de l'identité $u_n = (-1)^n u_0$, nous avons :

   ▷ $S_{2n} = \displaystyle\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k u_0 = u_0 \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k = u_0 \left(\sum_{k=0}^{n-1} \left((-1)^{2k} + (-1)^{2k+1} \right) + (-1)^{2n} \right) = u_0$

   ▷ $S_{2n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k u_0 = u_0 \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k = u_0 \left(\sum_{k=0}^{n} \left((-1)^{2k} + (-1)^{2k+1} \right) \right) = 0$

   $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc une suite qui ne prend que 2 valeurs u_0 pour les termes de rang pair, et 0 pour les termes de rang impair. $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc une suite qui n'admet pas de limite.

C'est un important résultat de cours :

$\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \lambda q^k$ **converge si et seulement si** $|q| < 1$ **et sa limite est** $\dfrac{\lambda}{1-q}$

Exercice 20 :

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_n = \dfrac{1}{2}\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^2$

1. *Quelle est limite de cette suite ?*

   De manière évidente, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{1}{2}$

2. *Justifier l'existence d'un entier N_0, tel que si $n > N_0$, alors $\dfrac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{49}{72}$*

   Tout d'abord, en développant, nous avons : $u_n = \dfrac{1}{2}\left(1 + \dfrac{2}{n} + \dfrac{1}{n^2}\right) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{2n^2}$

   Donc, $u_n - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{2n^2} \geqslant 0$; donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{2} \leqslant u_n$

D'autre part, comme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{1}{2}$, il existe un entier N_0 tel que, si $n \geqslant N_0$, $\left|u_n - \dfrac{1}{2}\right| \leqslant \dfrac{13}{72}$.

Donc, si $n \geqslant N_0$, $-\dfrac{13}{72} \leqslant u_n - \dfrac{1}{2} \leqslant \dfrac{13}{72} \iff \dfrac{1}{2} - \dfrac{13}{72} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{13}{72} + \dfrac{1}{2}$

Comme $\dfrac{1}{2} \leqslant u_n$ et $\dfrac{13}{72} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{49}{72}$ nous avons donc bien $\dfrac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{49}{72}$

3. *Calculer l'entier N_0*

   Il faut donc résoudre l'inéquation $\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^2 \leqslant \dfrac{49}{72} \iff \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^2 \leqslant \dfrac{49}{36}$.

   Comme n est positif, $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^2 \leqslant \dfrac{49}{36} \iff 1 + \dfrac{1}{n} \leqslant \dfrac{7}{6} \iff n \geqslant 6$

   L'entier N_0 est donc $N_0 = 6$

Exercice 21 :

Donnez les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\pi + \left(\dfrac{2}{3}\right)^n\right)$

   Ce n'est pas parce que π apparaît dans la question que la difficulté est plus grande ! !...Cette limite est en fait du type $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\mu + \lambda\left(\dfrac{2}{3}\right)^n\right)$ où $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\mu \in \mathbb{R}$.

   Mieux, cette limite entre dans cadre encore plus large : $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\mu + \lambda\,(q)^n\right)$ où $\lambda \in \mathbb{R}$, $\mu \in \mathbb{R}$ et $|q| < 1$

   Or, si $|q| < 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} (q)^n = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} (\lambda\,(q)^n) = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} (\mu + \lambda\,(q)^n) = \mu$ et, en particulier, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\pi + \left(\dfrac{2}{3}\right)^n\right) = \pi$

2. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sin n}{n}$

   Cette question est totalement liée à des méthodes de majoration. Ici, c'est très simple, puisque, pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous avons : $|\sin x| \leqslant 1$.

   Donc, $\left|\dfrac{\sin n}{n}\right| \leqslant \dfrac{1}{n}$; comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$, nous avons $\lim\limits_{n\to+\infty} \left|\dfrac{\sin n}{n}\right| = 0$, et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sin n}{n} = 0$

3. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sin^2 n - \cos^2 n}{n^3}$

   Nous allons donner méthodes pour résoudre cette question (*au demeurant très simple)*

   - Tout d'abord, on peut remarquer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left|\sin^2 n - \cos^2 n\right| \leqslant \sin^2 n + \cos^2 n = 1$, et donc :
   $$\left|\frac{\sin^2 n - \cos^2 n}{n^3}\right| \leqslant \frac{1}{n^3}$$
     Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^3} = 0$, nous en déduisons que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sin^2 n - \cos^2 n}{n^3} = 0$
   - Une autre possibilité pourrait consisyer à utiliser les formules trigonométriques :$\cos 2x = \cos^2 - \sin^2 x$, de telle sorte que $\dfrac{\sin^2 n - \cos^2 n}{n^3} = \dfrac{-\cos 2n}{n^3}$, et on termine en majorant

4. $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

   Voilà une question toute élémentaire qui utilise une notion de « **quantité conjuguée** »

Nous avons :

$$\begin{aligned}
\sqrt{n+1}-\sqrt{n} &= \frac{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \\
&= \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}
\end{aligned}$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n+1}+\sqrt{n}=+\infty$, nous avons $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=0$, et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n+1}-\sqrt{n}=0$

5. $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\sqrt{2n+1}-\sqrt{n}\right)$

Cette question est tout à fait cousine germaine de la question précédente, et il n'y a aucune raison pour qu'on n'utilise pas les mêmes techniques ! ! Nous avons donc :

$$\begin{aligned}
\sqrt{2n+1}-\sqrt{n} &= \frac{\left(\sqrt{2n+1}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{2n+1}+\sqrt{n}\right)}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{n}} \\
&= \frac{2n+1-n}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{n}} \\
&= \frac{n+1}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{n}}
\end{aligned}$$

Or, là, beaucoup de choses changent, et il faut faire intervenir d'autres techniques : on factorise par les expressions qui tendent « le plus rapidemnt » vers $+\infty$

$$\begin{aligned}
\frac{n+1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} &= \frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{n\left(2+\frac{1}{n}\right)}+\sqrt{n}} \\
&= \frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{n}\sqrt{2+\frac{1}{n}}+\sqrt{n}} \\
&= \frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{n}\left(\sqrt{2+\frac{1}{n}}+1\right)} \\
&= \sqrt{n}\left(\frac{1+\frac{1}{n}}{\sqrt{2+\frac{1}{n}}+1}\right)
\end{aligned}$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1+\frac{1}{n}}{\sqrt{2+\frac{1}{n}}+1}\right)=\frac{1}{1+\sqrt{2}}$, nous avons $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\sqrt{2n+1}-\sqrt{n}\right)=+\infty$

6. $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{3^n-2^n}{3^n+2^n}$

Il n'y a pas de méthode canonique pour calculer une limite. En observant bien numérateur et dénominateur, on factorise par l'expression qui tend le plus rapidement vers $+\infty$.

$$\frac{3^n-2^n}{3^n+2^n}=\frac{3^n\left(1-\frac{2^n}{3^n}\right)}{3^n\left(1+\frac{2^n}{3^n}\right)}=\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1+\left(\frac{2}{3}\right)^n}$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n=0$, nous avons $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1+\left(\frac{2}{3}\right)^n}=1$, c'est à dire $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{3^n-2^n}{3^n+2^n}=1$

7. $\lim\limits_{n\to+\infty} (a^n+b^n)$ *où* $a>0$ *et* $b>0$

Il est facile de remarquer que a et b jouent des rôles symétriques.

— Dans un premier temps, on suppose $a\neq b$

- ▷ Si $a > 1$, alors $\lim_{n\to+\infty} a^n = +\infty$ et donc $\lim_{n\to+\infty}(a^n + b^n) = +\infty$. Le problème est le même si $b > 1$.
  Donc, si $a > 1$ ou $b > 1$, alors $\lim_{n\to+\infty}(a^n + b^n) = +\infty$
- ▷ Si $a < 1$ et $b < 1$ alors, $\lim_{n\to+\infty} a^n = 0$ et $\lim_{n\to+\infty} b^n = 0$, donc $\lim_{n\to+\infty}(a^n + b^n) = 0$
- ▷ Si $a = 1$ et $b > 1$ alors $\lim_{n\to+\infty}(a^n + b^n) = +\infty$; le problème est le même si $b = 1$ et $a > 1$
- ▷ Si $a = 1$ et $b < 1$ alors $\lim_{n\to+\infty}(a^n + b^n) = 1$; le problème est le même si $b = 1$ et $a < 1$

— Supposons maintenant $a = b$
- ▷ Alors, si $b > 1$ $\lim_{n\to+\infty}(a^n + b^n) = +\infty$
- ▷ Et si $b < 1$, $\lim_{n\to+\infty}(a^n + b^n) = 0$

Exercice 22 :

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par ses deux premiers termes $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ et par la relation, définie pour tout $n \in \mathbb{N}$, par : $u_{n+2} = \frac{3}{2}u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n$
Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie sur $\mathbb{N}$ par : $v_n = u_{n+1} - u_n$

1. *Démontrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on donnera la raison et le premier terme. Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer v_n en fonction de n*

   Il faut, comme toujours, exprimer v_{n+1} en fonction de v_n

$$\begin{aligned} v_{n+1} = &\quad u_{n+2} - u_{n+1} \\ = &\quad \frac{3}{2}u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n - u_{n+1} \\ = &\quad \frac{1}{2}u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n \\ = &\quad \frac{1}{2}(u_{n+1} - u_n) \\ = &\quad \frac{1}{2}v_n \end{aligned}$$

   La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de raison $v_0 = 1$, de telle sorte que $v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n v_0 = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

2. *En déduire l'expression de u_n en fonction de n, puis $\lim_{n\to+\infty} u_n$*

   Nous avons $\sum_{k=0}^{n} v_k = \sum_{k=0}^{n}(u_{k+1} - u_k) = \sum_{k=0}^{n} u_{k+1} - \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n+1} u_k - \sum_{k=0}^{n} u_k = u_{n+1} - u_0$. En clair :

$$u_{n+1} = u_0 + \sum_{k=0}^{n} v_k = 1 + \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^k = 1 + \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = 3 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

   Ainsi, $u_n = 3 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ et donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = 3$

3. *Déterminer le plus petit entier n_0 tel que, pour tout entier $n \geqslant n_0$, nous ayions : $|u_n - 3| < 10^{-5}$*

   Tout d'abord, nous avons $|u_n - 3| = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$; il faut donc trouver n_0 tel que, pour tout entier $n \geqslant n_0$, nous ayions $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} < 10^{-5}$.
   On trouve $n_0 = 18$

Exercice 23 :

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par son premier terme $u_0 \in \mathbb{R}$, et par la relation de récurrence, définie pour tout $n \in \mathbb{N}$, par : $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2$

1. *Etudier le cas où $u_0 = 3$*

   Une récurrence simple montre qui si $u_0 = 3$, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 3$

2. *On suppose $u_0 \neq 3$. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on définit une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $(\forall n \in \mathbb{N})\ (v_n = u_n + \alpha)$ Montrer qu'il existe une valeur de α pour laquelle la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique*

   Classique ! ! On prend donc v_{n+1} que nous allons exprimer en fonction de v_n.
   $v_{n+1} = u_{n+1} + \alpha = \frac{1}{3}u_n + 2 + \alpha = \frac{1}{3}(u_n + 6 + 3\alpha)$. Si $v_n = u_n + \alpha$, on peut donc écrire $\alpha = 6 + 3\alpha$ dont on déduit $\alpha = -3$.
   En posant $v_n = u_n - 3$, nous avons $v_{n+1} = \frac{1}{3}v_n$

3. *Exprimer u_n en fonction de u_0 et de n. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et donner sa limite.*

   Nous avons $u_n = v_n + 3$; $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant géométrique, $v_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n v_0$; comme $v_0 = u_0 - 3$, nous avons $u_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n (u_0 - 3) + 3$
   Et nous avons donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 3$

Exercice 24 :

C'EST VOLONTAIREMENT QUE NOUS N'UTILISONS PAS L'ÉNONCÉ INITIAL ; NOUS FAISONS, TOUT DE SUITE UNE GÉNÉRALISATION. LE RETOUR À L'ÉNONCÉ INITIAL EST ÉVIDENT

1. *On considère une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à termes positifs tels que : $\frac{x_{n+1}}{x_n} \geqslant q$, avec $q > 1$ à partir d'un certain rang $N_0 \in \mathbb{N}$*
   Montrer que, pour tout $n \geqslant N_0$, alors $x_n \geqslant q^{n-N_0}x_{N_0}$; en déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$;

   Si $n \geqslant N_0$, alors, nous avons :
   $$\begin{aligned}\frac{x_{N_0+1}}{x_{N_0}} &\geqslant q\\ \frac{x_{N_0+2}}{x_{N_0+1}} &\geqslant q\\ \vdots\ &\ \vdots\\ \frac{x_{n-1}}{x_{n-2}} &\geqslant q\\ \frac{x_n}{x_{n-1}} &\geqslant q\end{aligned}$$
   En multipliant termes à termes, nous avons :
   $$\frac{x_{N_0+1}}{x_{N_0}} \times \frac{x_{N_0+2}}{x_{N_0+1}} \times \cdots \times \frac{x_{n-1}}{x_{n-2}} \times \frac{x_n}{x_{n-1}} \geqslant q^{n-N_0}$$
   Et, par simplification, nous obtenons : $\frac{x_n}{x_{N_0}} \geqslant q^{n-N_0} \iff x_n \geqslant q^{n-N_0}x_{N_0}$
   Comme $q > 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^{n-N_0} = +\infty$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$

2. *On considère maintenant une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à termes positifs tels que : $\frac{x_{n+1}}{x_n} \leqslant q$ avec $q < 1$ à partir d'un certain rang $N_0 \in \mathbb{N}$; donner $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$*

   Nous allons procéder comme dans la question précédente.

Si $n \geqslant N_0$, alors, nous avons :

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{x_{N_0+1}}{x_{N_0}} & \leqslant & q \\ \dfrac{x_{N_0+2}}{x_{N_0+1}} & \leqslant & q \\ \vdots & \vdots & \\ \dfrac{x_{n-1}}{x_{n-2}} & \leqslant & q \\ \dfrac{x_n}{x_{n-1}} & \leqslant & q \end{array}$$

En multipliant termes à termes, nous avons :

$$\frac{x_{N_0+1}}{x_{N_0}} \times \frac{x_{N_0+2}}{x_{N_0+1}} \times \cdots \times \frac{x_{n-1}}{x_{n-2}} \times \frac{x_n}{x_{n-1}} \leqslant q^{n-N_0}$$

Et, par simplification, nous obtenons : $\dfrac{x_n}{x_{N_0}} \leqslant q^{n-N_0} \Longleftrightarrow x_n \leqslant q^{n-N_0} x_{N_0}$

Comme $q < 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^{n-N_0} = 0$ et donc $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = 0$

3. *Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $x > 0$. On considère la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $x_n = \dfrac{x^n}{n}$, pour $n \neq 0$*
   - ▷ *On suppose $0 < x \leqslant 1$. Donner $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n$*
     - — Si $x = 1$, alors $\dfrac{x^n}{n} = \dfrac{1}{n}$ et donc $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = 0$
     - — Si $0 < x < 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} x^n = 0$ et donc, comme $\dfrac{x^n}{n} = x^n \times \dfrac{1}{n}$, nous avons, une nouvelle fois $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = 0$

     Donc, si $0 < x \leqslant 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{x^n}{n} = 0$
   - ▷ *On suppose $x > 1$. Donner $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n$*

     Cette fois ci, c'est moins simple, puisque, si $x > 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} x^n = +\infty$ et nous avons toujours $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n} = 0$. Nous sommes donc devant un cas d'indétermination.
     Utilisons les outils démontrés dans les questions précédentes :

     $$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{x^{n+1}}{n+1} \times \frac{n}{x^n} = \frac{nx}{n+1}$$

     Nous avons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < \dfrac{nx}{n+1} < x$, et $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{nx}{n+1} = x$; comme $x > 1$, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geqslant N_1$, alors $1 < \dfrac{nx}{n+1} < x$. Donc, nous avons $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{x^n}{n} = +\infty$

   Synthèse :

   — Si $0 < x < 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{x^n}{n} = 0$

   — Si $1 < x$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{x^n}{n} = +\infty$

   Question : Généraliser à tout $x \in \mathbb{R}$
4. *Etudier les suites définies par $x_n = \dfrac{2^n}{n!}$*
5. **Généralisation :**
   Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs tels que $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = l$
   Montrer que si $l < 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$ et que, si $l > 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$
6. **Que se passe-t-il si $l = 1$?** L'objet de cette question est de montrer qu'il est impossible de décider quoi que ce soit lorsque $l = 1$

(a) On considère la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $a_n = n^3$ donner $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$, puis $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$

(b) On considère la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $b_n = \frac{1}{n^3}$ donner $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n$, puis $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n}$

(c) On considère la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $c_n = \frac{2(n+1)(n+2)}{n^2}$ donner $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n$, puis $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{c_{n+1}}{c_n}$

(d) On considère la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = 1$; que dire de $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$?

8.8.3 Problèmes

Exercice 38 :

Soit $x \in \mathbb{R}$; on rappelle que la partie entière de x est l'unique entier relatif $\mathrm{E}(x) = [x]$ tel que

$$[x] \leqslant x < [x] + 1$$

1. *Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, $10^{-n}[10^n x] \leqslant x < 10^{-n}[10^n x] + 10^{-n}$*

   Par définition de la partie entière, $[10^n x] \leqslant 10^n x < [10^n x] + 1$; le résultat demandé est obtenu en multipliant l'inégalité par 10^{-n}

2. *On appelle $u_n = 10^{-n}[10^n x]$ et $v_n = u_n + 10^{-n}$; montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = x$*

   D'après la question précédente, nous avons : $u_n \leqslant x < v_n$, ou encore, $u_n \leqslant x < u_n + 10^{-n}$. Cette dernière inégalité est équivalente à $0 \leqslant x - u_n < 10^{-n}$; comme $\lim\limits_{n\to+\infty} 10^{-n} = 0$, nous avons $\lim\limits_{n\to+\infty} (x - u_n) = 0$, c'est à dire $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n) = x$; comme $v_n = u_n + 10^{-n}$, nous avons aussi $\lim\limits_{n\to+\infty} (v_n) = x$

3. *On construit la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $a_0 = 0$ et $a_n = 10^n(u_n - u_{n-1})$; montrer que $a_n \in \mathbb{Z}$*

   Il suffit de réécrire a_n :

   $$a_n = 10^n(u_n - u_{n-1}) = 10^n\left(10^{-n}[10^n x] - 10^{-(n-1)}\left[10^{(n-1)}x\right]\right)$$

   Et alors, $a_n = [10^n x] - 10\left[10^{(n-1)}x\right]$, ce qui montre que $a_n \in \mathbb{Z}$

4. *En utilisant l'inégalité $u_n \leqslant x < u_n + 10^{-n}$, montrer que $-1 < a_n < 10$, et que a_n ne peut donc prendre que 10 valeurs à préciser*

   On peut écrire l'inégalité à l'ordre n et à l'ordre $n-1$

   $$\left\{\begin{array}{c} u_n \leqslant x < u_n + 10^{-n} \\ u_{n-1} \leqslant x < u_{n-1} + 10^{-n+1} \end{array}\right. \implies \left\{\begin{array}{c} u_n \leqslant x < u_n + 10^{-n} \\ -u_{n-1} - 10^{-n+1} < -x \leqslant -u_{n-1} \end{array}\right.$$

   Ce qui donne, en additionnant,

   $$u_n - u_{n-1} - 10^{-n+1} < 0 < u_n + 10^{-n} - u_{n-1}$$

   Ce qui, traduit autrement, nous donne :

   $$-10^{-n} < u_n - u_{n-1} < 10^{-n+1}$$

   En multipliant l'inégalité par 10^n, nous obtenons l'inégalité demandée ; comme $a_n \in \mathbb{Z}$, les seules valeurs admissibles sont donc $a_n \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

5. *Pour $n \geq 1$, démontrer que $u_n = \sum\limits_{p=1}^{n} a_p 10^{-p} + u_0$*

(a) Il faut d'abord remarquer que $u_0 = 2^{-0}\left[2^0 x\right] = [x]$

(b) Puis, de l'identité $a_n = 10^n\left(u_n - u_{n-1}\right)$, nous pouvons déduire $u_n - u_{n-1} = a_n 10^{-n}$, puis en faisant la somme

$$\begin{aligned} u_1 - u_0 &= a_1 10^{-1} \\ u_2 - u_1 &= a_2 10^{-2} \\ u_3 - u_2 &= a_3 10^{-3} \\ &\dots \\ u_n - u_{n-1} &= a_n 10^{-n} \end{aligned}$$

nous obtenons, après simplification $u_n - u_0 = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k 10^{-k}$, c'est à dire $u_n = u_0 + \sum\limits_{k=1}^{n} a_k 10^{-k}$, ce que nous voulions

6. *u_n est donc une approximation de x à 10^{-n} près et u_n peut donc s'écrire :*

$$u_n = u_0, a_1 a_2 \dots a_n$$

(Ecriture décimale de x, n chiffres après la virgule)

Exercice 40 :

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par :

$$x_0 = 2 \quad x_1 = 3 \text{ et pour } n \geqslant 0 \qquad x_{n+2} = \frac{x_n + x_{n+1}}{2}$$

Il faut montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et en donner la limite

1. On commence par créer la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $u_n = x_{n+1} - x_n$. Cette suite est géométrique.
   En effet, nous avons :
   - ▷ $u_0 = x_1 - x_0 = 1$
   - ▷ $u_{n+1} = x_{n+2} - x_{n+1} = x_{n+2} = \dfrac{x_n + x_{n+1}}{2} - x_{n+1} = \dfrac{x_n - x_{n+1}}{2} = \dfrac{-1}{2} u_n$

     La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc géométrique de premier terme 1 et de raison $\dfrac{-1}{2}$
   - ▷ Nous avons donc $u_n = \left(\dfrac{-1}{2}\right)^n$

2. Nous avons donc $\sum\limits_{k=0}^{n} u_k = \sum\limits_{k=0}^{n}\left(\dfrac{-1}{2}\right)^k = \dfrac{1 - \left(\dfrac{-1}{2}\right)^{n+1}}{\frac{3}{2}} = \dfrac{2}{3}\left(1 - \left(\dfrac{-1}{2}\right)^{n+1}\right)$

   D'autre part :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} u_k &= \sum_{k=0}^{n} x_{k+1} - x_k \\ &= \sum_{k=0}^{n} x_{k+1} - \sum_{k=0}^{n} x_k \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} x_k - \sum_{k=0}^{n} x_k \\ &= x_{n+1} - x_0 \end{aligned}$$

   Et donc, $x_{n+1} = x_0 + \dfrac{2}{3}\left(1 - \left(\dfrac{-1}{2}\right)^{n+1}\right)$

3. De telle sorte que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 2 + \dfrac{2}{3} = \dfrac{8}{3}$