Chapitre 7

Limite et continuité d'une fonction numérique réelle

Beaucoup des résultats de ce cours seront donnés sans démonstration. Il faudra faire les exercices présents dans ce chapitre, et qui illustrent autant que possible le cours. Ce seront les outils de votre travail personnel qui vous permettront de bien assimiler ce chapitre. Les démonstrations seront souvent faites dans le cours de L_1

7.1 Limite finie d'une fonction

7.1.1 Introduction

Que dire de cette fonction dont le graphe est ci-après (figure 7.1) ? Quel est le comportement de cette fonction au voisinage de 0 ?

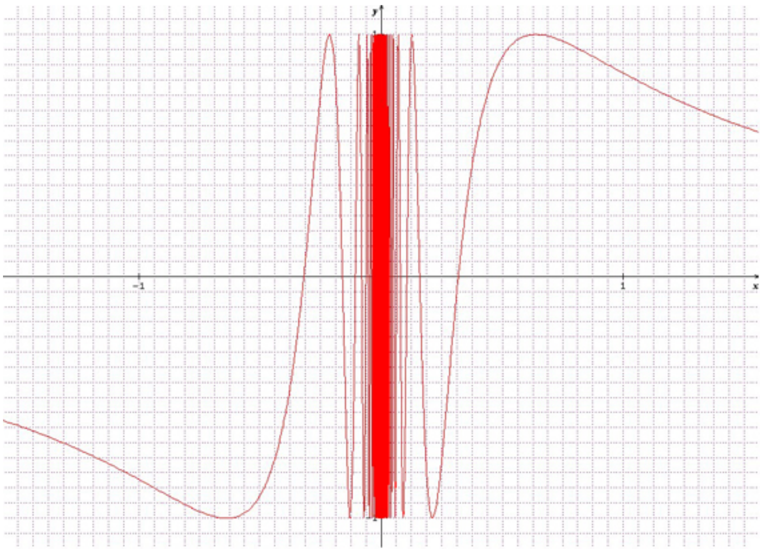


FIGURE 7.1 – Le comportement de la fonction $\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ au voisinage de 0

Pas très facile à dire !! Il faut donc étuder très rigoureusement ces fonctions au voisinage des points « turbulents »

Exemple 1 :

EXERCICE D'INTRODUCTION

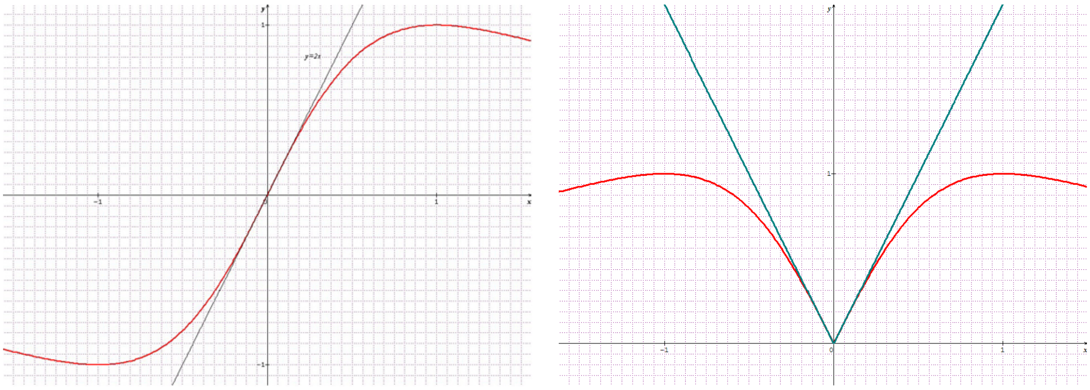


FIGURE 7.2 – La fonction $\varphi(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$ et la droite d'équation $y = 2x$ au voisinage de 0 sur la figure de gauche, et, sur la figure de droite, $|\varphi(x)|$ et $y = 2|x|$

Soit $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction numérique définie telle que : $\varphi(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$ (voir le graphe sur la figure 7.2)

1. Quel est le domaine de définition de φ ?
2. Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R}, |\varphi(x)| \leq 2|x|$
3. Quelles conditions faut-il sur $x \in \mathbb{R}$ pour que $|\varphi(x)| \leq 10^{-n}$ où $n \in \mathbb{N}$

7.1.2 Précisions importantes

1. **Que signifie x tend vers 0 ?**
   Cela signifie que « x est suffisamment proche de 0 » ou encore que x est situé au « voisinage de 0 » et x prend successivement des valeurs de plus en plus proches de 0.
   Mais comment ? Dans $\mathbb{R}$, il n'y a que « deux manières principales de tendre vers 0 » :
   — x peut tendre vers 0 en prenant des valeurs positives, on écrit que $x \to 0 \quad x > 0$ et on lit « x tend vers 0 par valeurs positives »ou « x tend vers 0 par valeurs supérieures » ou encore « x tend vers 0 à droite de 0 ».
   La notation $x \to 0^+$ est admise mais à éviter.
   — x peut tendre vers 0 en prenant des valeurs négatives, on écrit que $x \to 0 \quad x < 0$ et on lit « x tend vers 0 par valeurs négatives »ou « x tend vers 0 par valeurs inférieures » ou encore « x tend vers 0 à gauche de 0 ».
   La notation $x \to 0^-$ est admise mais est aussi à éviter.
2. **Que signifie x tend vers x_0 ?**
   Cela signifie que x prend successivement des valeurs de plus en plus proches de x_0. Ce qui peut se traduire par $(x - x_0) \to 0$.
   Comme pour 0, on distingue « deux manières principales de tendre vers x_0 » :
   — x peut tendre vers x_0 en prenant des valeurs positives, on écrit que $x \to x_0 \quad x > x_0$ et on lit « x tend vers x_0 par valeurs positives »ou « x tend vers x_0 par valeurs supérieures » ou encore « x tend vers x_0 à droite ».
   La notation $x \to x_0^+$ est admise mais à proscrire.
   — x peut tendre vers x_0 en prenant des valeurs négatives, on écrit que $x \to 0 \quad x < x_0$ et on lit « x tend vers x_0 par valeurs négatives »ou « x tend vers x_0 par valeurs inférieures » ou encore « x tend vers x_0 à gauche ».
   La notation $x \to x_0^-$ est admise mais à proscrire.

3. Dans ce paragraphe sur les limites, f est une fonction définie sur I et x_0 est toujours un réel tel que I soit un domaine *(le plus souvent un intervalle)* qui contienne toujours un intervalle de la forme :
   — $]x_0, x_0 + a[$ où $a > 0$
   — $]x_0 - b, x_0[$ où $b > 0$
   On pourra aussi s'intéresser à des intervalles de la forme $]x_0 - b, x_0[\cup]x_0, x_0 + a[$ ou bien $]x_0 - a, x_0 + a[$.
   x_0 pourra ne pas être élément [1] de I
   Dans tous ces cas, on dit que x est adhérent à I

7.1.3 Définition de la limite d'une fonction

En guise d'introduction, nous pouvons écrire que, si $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et si $x_0 \in I$, f admet l comme limite en x_0 si $f(x)$ est proche de l lorsque x est proche de x_0. Cette approche est formalisée comme suit :

Soit f une fonction numérique d'une variable réelle.
On dit que f tend vers l quand x tend vers x_0 si, pour tout intervalle ouvert J de centre l, il existe un intervalle I de centre x_0 tel que $f(I) \subset J$
Autrement dit,

$$\boxed{(\forall\varepsilon > 0)\,(\exists\eta_\varepsilon > 0)\,/\,(|x - x_0| < \eta_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon)}$$

On écrit alors

$$\boxed{\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} f(x) = l}$$

7.1.4 Limites à droites, limites à gauche

1. **Limite à droite :**
   On dit que f tend vers l lorsque x tend vers x_0 à droite, et on écrit $\boxed{\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) = l}$ si,

$$\boxed{(\forall\varepsilon > 0)\,(\exists\eta_\varepsilon > 0)\,/\,(0 < x - x_0 < \eta_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon)}$$

2. **Limite à gauche**
   On dit que f tend vers l lorsque x tend vers x_0 à gauche, et on écrit $\boxed{\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = l}$, si,

$$\boxed{(\forall\varepsilon > 0)\,(\exists\eta_\varepsilon > 0)\,/\,(0 < x_0 - x < \eta_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon)}$$

7.1.5 Proposition

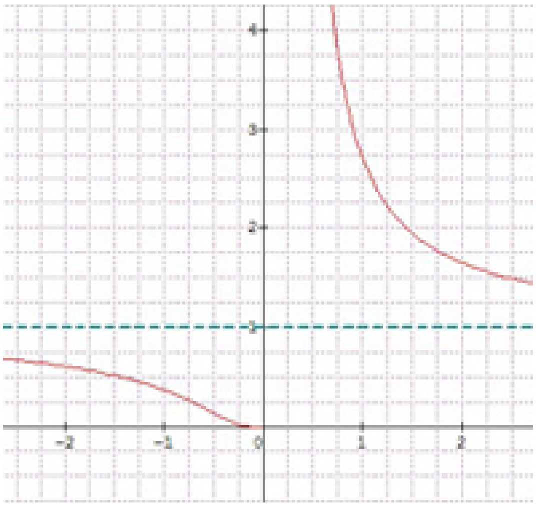
Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I, sauf, peut-être en $x_0 \in I$.
f admet une limite en x_0, si et seulement si, elle admet une limite droite de x_0 notée l_d , et une limite à gauche de x_0 notée l_g, et si ces limites sont égales $l_d = l_g = l$

Exemple 2 :

Voici 2 fonctions qui n'admettent pas de limite en 0 Il suffit de lire le graphe 7.3.

1. La fonction $\varphi(x) = e^{\frac{1}{x}}$ est une fonction qui admet une limite à gauche (nous avons $\lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} e^{\frac{1}{x}} = 0$), sans en admettre une à droite (nous avons $\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} e^{\frac{1}{x}} = +\infty$)

1. La notion d'ahérence est vue dans le cours de L_1



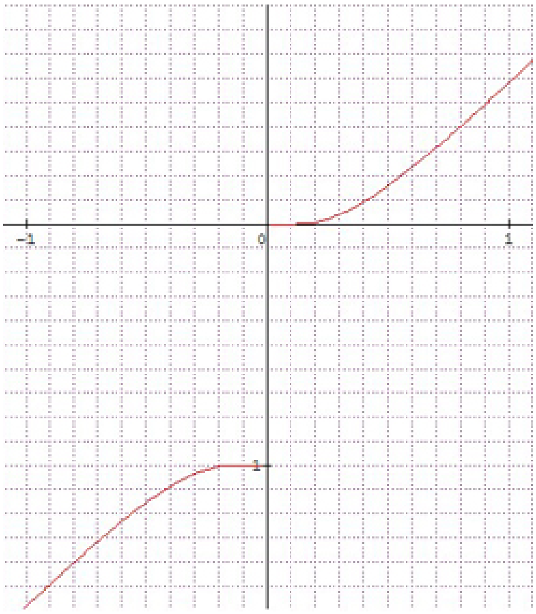


FIGURE 7.3 – A gauche, le graphe de la fonction $\varphi(x) = e^{\frac{1}{x}}$ au voisinage de 0, et, à droite, le graphe de la fonction $f(x) = \dfrac{1}{e^{\frac{1}{x}} - 1}$ au voisinage de 0

2. La fonction $f(x) = \dfrac{1}{e^{\frac{1}{x}} - 1}$ est une fonction qui admet une limite à gauche et une limite à droite : nous avons $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \dfrac{1}{e^{\frac{1}{x}} - 1} = -1$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \dfrac{1}{e^{\frac{1}{x}} - 1} = 0$

   La fonction $f(x) = \dfrac{1}{e^{\frac{1}{x}} - 1}$ n'admet donc pas de limite en 0

7.1.6 Unicité de la limite

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I, sauf, peut-être en $x_0 \in I$.
On suppose que f admette une limite quand x tend vers x_0.
Alors, cette limite est unique

Démonstration

On suppose que f admette 2 limites appelées l_1 et l_2 avec $l_1 \neq l_2$, c'est à dire $|l_1 - l_2| > 0$
On appelle $\varepsilon = \dfrac{|l_1 - l_2|}{4}$

- ▷ On écrit que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l_1$

  Il existe donc $\eta_1 > 0$ tel que si $|x - x_0| < \eta_1$ alors $|f(x) - l_1| \leqslant \varepsilon$
- ▷ On écrit que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l_2$

  De même, il existe donc $\eta_2 > 0$ tel que si $|x - x_0| < \eta_2$ alors $|f(x) - l_2| \leqslant \varepsilon$

Soit $\eta = \min\{\eta_1; \eta_2\}$; alors, pour $|x - x_0| < \eta$:

$$|l_1 - l_2| \leqslant |f(x) - l_1| + |f(x) - l_2| \leqslant 2\varepsilon = 2 \times \frac{|l_1 - l_2|}{4} = \frac{|l_1 - l_2|}{2}$$

Ainsi, nous avons, pour $|x - x_0| < \eta$, $|l_1 - l_2| \leqslant \dfrac{|l_1 - l_2|}{2}$, ce qui est impossible.
Donc $l_1 = l_2$ et la limite est donc unique.

7.1.7 Opérations sur les limites

Soient f et g 2 fonctions numériques définies sur un intervalle I sauf, peut-être en x_0
Supposons que $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} f(x) = l_1$ et que $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} g(x) = l_2$; on suppose l_1 et l_2, finies.
Alors, nous avons les propriétés suivantes :

1. **Addition :** $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} (f+g)(x) = l_1 + l_2$
2. **Multiplication par un scalaire :** $(\forall \lambda \in \mathbb{R}) \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} \lambda f(x) = \lambda l_1$
3. **Multiplication :** $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} (f \times g)(x) = l_1 l_2$
4. **Quotient : Si $l_2 \neq 0$, alors** $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{l_1}{l_2}$

Démonstration

1. **Nous démontrons le résultat pour l'addition**
   Soient f et g 2 fonctions numériques définies sur un intervalle I sauf, peut-être en x_0 telles que $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} f(x) = l_1$ et que $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} g(x) = l_2$. Nous allons démontrer que $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} (f+g)(x) = l_1 + l_2$
   Soit $\varepsilon > 0$
   - On écrit que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l_1$
     Il existe donc $\eta_1 > 0$ tel que si $|x - x_0| < \eta_1$ alors $|f(x) - l_1| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$
   - On écrit que $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = l_2$
     De même, il existe donc $\eta_2 > 0$ tel que si $|x - x_0| < \eta_2$ alors $|g(x) - l_2| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$

   Soit $\eta = \min\{\eta_1 ; \eta_2\}$; alors, pour $|x - x_0| < \eta$:
   $$|(f(x)+g(x)) - (l_1+l_2)| = |(f(x)-l_1) + (g(x)-l_2)| \leqslant |f(x)-l_1| + |g(x)-l_2| \leqslant 2 \times \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$
   Ainsi, nous avons démontré que si $|x - x_0| < \eta$, alors $|(f(x)+g(x)) - (l_1+l_2)| \leqslant \varepsilon$
   Ce qui démontre que $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} (f+g)(x) = l_1 + l_2$.
2. **Nous démontrons le résultat pour la multiplication par un scalaire**
   - Si $\lambda = 0$, alors ; pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous avons $\lambda f(x) = 0$, et donc
     $$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} (\lambda f)(x) = 0 = 0 \times l_1 = \lambda l_1$$
   - Supposons $\lambda \neq 0$, c'est à dire $|\lambda| > 0$.
     Nous avons : $|(\lambda f)(x) - \lambda l_1| = |\lambda f(x) - \lambda l_1| = |\lambda| \, |f(x) - l_1|$
     Soit $\varepsilon > 0$
     Alors, il existe $\eta_\varepsilon > 0$ tel que si $x \in \mathbb{R}$ et $|x - x_0| < \eta_\varepsilon$ alors $|f(x) - l_1| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{|\lambda|}$
     Et donc, si $x \in \mathbb{R}$ et $|x - x_0| < \eta_\varepsilon$ alors $|\lambda| \, |f(x) - l_1| \leqslant |\lambda| \times \dfrac{\varepsilon}{|\lambda|} = \varepsilon$

   On vient donc de montrer que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} \lambda f(x) = \lambda l_1$
3. **Nous démontrons le résultat pour la multiplication de deux fonctions**
   Nous avons : $(f \times g)(x) - l_1 l_2 = f(x) g(x) - l_1 l_2$
   D'autre part :
   - $f(x) = (f(x) - l_1) + l_1$
   - $g(x) = (g(x) - l_2) + l_2$

▷ En multipliant les 2 équations ci-dessus et en retirant $l_1 l_2$, nous obtenons :

$$\begin{aligned} f(x)\, g(x) - l_1 l_2 = & \ ((f(x) - l_1) + l_1)\,((g(x) - l_2) + l_2) - l_1 l_2 \\ = & \ (f(x) - l_1)\,(g(x) - l_2) + l_1\,(g(x) - l_2) + l_2\,(f(x) - l_2) \end{aligned}$$

De telle sorte que :

$$|f(x)\, g(x) - l_1 l_2| \leqslant |f(x) - l_1|\,|g(x) - l_2| + |l_1|\,|g(x) - l_2| + |l_2|\,|f(x) - l_2|$$

Soit $\varepsilon > 0$

— Nous écrivons que $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} f(x) = l_1$
   — Il existe η_ε^1 telque si $|x - x_0| < \eta_\varepsilon^1$, alors $|f(x) - l_1| < \dfrac{\varepsilon}{3(1 + |l_1|)}$
   — De même, Il existe η_ε^2 telque si $|x - x_0| < \eta_\varepsilon^2$, alors $|f(x) - l_1| < \sqrt{\dfrac{\varepsilon}{3}}$

— Nous écrivons que $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} g(x) = l_2$
   — Il existe η_ε^3 telque si $|x - x_0| < \eta_\varepsilon^3$, alors $|g(x) - l_2| < \dfrac{\varepsilon}{3(1 + |l_2|)}$
   — De même, Il existe η_ε^4 telque si $|x - x_0| < \eta_\varepsilon^4$, alors $|g(x) - l_2| < \sqrt{\dfrac{\varepsilon}{3}}$

Soit $\delta = \inf\left\{\eta_\varepsilon^1, \eta_\varepsilon^2, \eta_\varepsilon^3, \eta_\varepsilon^4\right\}$. Alors, si $|x - x_0| < \delta$, alors nous avons, en même temps :

— $|f(x) - l_1| < \dfrac{\varepsilon}{3(1 + |l_1|)}$
— $|f(x) - l_1| < \sqrt{\dfrac{\varepsilon}{3}}$
— $|g(x) - l_2| < \dfrac{\varepsilon}{3(1 + |l_2|)}$
— $|g(x) - l_2| < \sqrt{\dfrac{\varepsilon}{3}}$

Et donc, si $|x - x_0| < \delta$, alors :

$$\begin{aligned} |f(x)\, g(x) - l_1 l_2| \leqslant & \ |f(x) - l_1|\,|g(x) - l_2| + |l_1|\,|g(x) - l_2| + |l_2|\,|f(x) - l_2| \\ < & \ \sqrt{\frac{\varepsilon}{3}} \times \sqrt{\frac{\varepsilon}{3}} + |l_1| \times \frac{\varepsilon}{3(1 + |l_1|)} + |l_2| \times \frac{\varepsilon}{3(1 + |l_2|)} \\ < & \ \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$

Et donc $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} (f \times g)(x) = l_1 l_2$

4. **Nous démontrons le résultat pour le quotient de deux fonctions**

Nous allons, en fait, démontrer que, si $l_1 \neq 0$, alors $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} \dfrac{1}{f(x)} = \dfrac{1}{l_1}$, le résultat sur le quotient venant en combinant ce résultat avec le résultat sur la multiplication de 2 fonctions.

Il y a un résultat important que nous allons utiliser, c'est l'inégalité, issue de l'inégalité triangulaire :

$$||a| - |b|| \leqslant |a - b|$$

Comme $l_1 \neq 0$, nous avons $|l_1| > 0$.

Il existe donc $\eta_1 > 0$ tel que si $|x - x_0| < \eta_1$, alors $|f(x) - l_1| < \dfrac{|l_1|}{2}$.

Et, de l'inégalité triangulaire, nous déduisons que si $|x - x_0| < \eta_1$, alors $||f(x)| - |l_1|| < \dfrac{|l_1|}{2}$. Or :

$$||f(x)| - |l_1|| < \frac{|l_1|}{2} \Longleftrightarrow \frac{|l_1|}{2} < |f(x)| < \frac{3\,|l_1|}{2}$$

D'où nous déduisons :

$$\frac{2}{3\,|l_1|} < \frac{1}{|f(x)|} < \frac{2}{|l_1|}$$

De l'inégalité précédente, nous tirons deux choses :

- ▷ Une première, évidente : $\dfrac{1}{|f(x)|} < \dfrac{2}{|l_1|}$
- ▷ En second lieu, de $\dfrac{2}{3|l_1|} < \dfrac{1}{|f(x)|}$, nous en déduisons que $\dfrac{2}{|l_1|} < \dfrac{3}{|f(x)|}$

C'est à dire que nous avons :

$$\frac{1}{|f(x)|} < \frac{2}{|l_1|} < \frac{3}{|f(x)|}$$

Revenons maintenant à notre expression de départ : $\left|\dfrac{1}{f(x)} - \dfrac{1}{l_1}\right|$:

$$\left|\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{l_1}\right| = \left|\frac{f(x) - l_1}{f(x) \times l_1}\right| = \frac{1}{|f(x)| \times |l_1|} \times |f(x) - l_1|$$

Ainsi, si $|x - x_0| < \eta_1$, alors $\dfrac{1}{|f(x)| \times |l_1|} \times |f(x) - l_1| \leqslant \dfrac{2}{|l_1|^2} \times |f(x) - l_1|$

Soit $\varepsilon > 0$

Il existe $\eta_2 > 0$ tel que $|x - x_0| < \eta_2$, alors $|f(x) - l_1| \leqslant \dfrac{|l_1|^2}{2} \times \varepsilon$

En posant $\eta = \inf\{\eta_1; \eta_2\}$, si $|x - x_0| < \eta$, alors $|f(x) - l_1| \leqslant \dfrac{|l_1|^2}{2} \times \varepsilon$, et donc

$$\left|\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{l_1}\right| \leqslant \frac{2}{|l_1|^2} \times |f(x) - l_1| \leqslant \frac{2}{|l_1|^2} \times \frac{|l_1|^2}{2} \times \varepsilon = \varepsilon$$

Nous venons donc de démontrer que si $l_1 \neq 0$, alors $\displaystyle\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{l_1}$

En combinant avec le résultat précédent, nous avons bien, si $l_2 \neq 0$, alors $\displaystyle\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l_1}{l_2}$

Remarque 1 :

La multiplication par un scalaire est inclus dans le cas de la multiplication de 2 fonctions, où l'une des deux fonctions est constante

7.1.8 Composition des applications *(Résultat admis)*

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I , et soit $x_0 \in I$
Soit g une fonction numérique définie sur un intervalle J
On suppose : $f(I) \subset J$ $\quad \displaystyle\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} f(x) = y_0 \quad y_0 \in J \quad \lim_{\substack{y \to y_0 \\ y \neq y_0}} g(x) = l$

Alors, $\displaystyle\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} g \circ f(x) = l$

Remarque 2 :

Ce résultat sera démontré dans la partie L_1 du cours

Exemple 3 :

1. Calculons $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x+1)}{\ln x}$.
   En utilisant les propriétés du logarithme, nous avons :
   $$\frac{\ln(x+1)}{\ln x} = \frac{\ln\left(x\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)}{\ln x} = \frac{\ln x + \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\ln x}$$

Finalement : $\dfrac{\ln(x+1)}{\ln x} = 1 + \dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\ln x}$.

D'où $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x+1)}{\ln x} = \lim\limits_{x\to+\infty} 1 + \dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\ln x} = 1$

2. <u>Calculons : $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x+1) - \ln x$.</u>

   Nous avons
   $$\ln(x+1) - \ln x = \ln\left(x\left(1+\frac{1}{x}\right)\right) - \ln(x) = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$$
   Finalement $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x+1) - \ln(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = 0$

3. <u>Soit à calculer : $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(e^x+1) - x$.</u>

   Nous avons :
   $$\ln(e^x+1) - x = \ln\left(e^x\left(1+e^{-x}\right)\right) - x = \ln e^x + \ln\left(1+e^{-x}\right) - x = \ln(1+e^{-x})$$
   Finalement : $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(e^x+1) - x = \lim\limits_{x\to+\infty} \ln(1+e^{-x}) = 0$.

Exercice 1 :

Voici deux exercices résolus

1. Etudiez $\lim\limits_{x\to1} \sin\left(\dfrac{\pi\left(x^2-x\right)}{x^2-1}\right)$

   <u>**Résolution**</u>

   Nous allons commencer par chercher $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{\left(x^2-x\right)}{x^2-1}$

   C'est un rapport de 2 polynômes qui admetent, tous les deux 1 comme racine ; il est donc tout à fait possible de factoriser par $x-1$. Nous avons donc :
   $$\frac{\left(x^2-x\right)}{x^2-1} = \frac{x(x-1)}{(x-1)(x+1)} \overset{x\neq1}{=} \frac{x}{(x+1)}$$
   De telle sorte que $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{\left(x^2-x\right)}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to1} \dfrac{x}{(x+1)} = \dfrac{1}{2}$

   Donc, $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{\pi\left(x^2-x\right)}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to1} \dfrac{x}{(x+1)} = \dfrac{\pi}{2}$

   Et, $\lim\limits_{x\to1} \sin\left(\dfrac{\pi\left(x^2-x\right)}{x^2-1}\right) = \sin\dfrac{\pi}{2} = 1$

2. $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x<-1}} \sqrt{\dfrac{x^2-1}{x^2-4x+3}}$ puis $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}} \sqrt{\dfrac{x^2-1}{x^2-4x+3}}$

   <u>**Résolution**</u>

   (a) Regardons donc la limite de $\sqrt{\dfrac{x^2-1}{x^2-4x+3}}$ lorsque x tend vers -1, à gauche de -1.

   Tout d'abord, remarquons que $\dfrac{x^2-1}{x^2-4x+3} = \dfrac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x-3)} \overset{x\neq-1}{=} \dfrac{(x+1)}{(x-3)}$

   On peut remarquer que si $x < -1$, alors $\dfrac{(x+1)}{(x-3)} > 0$, et que donc $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x<-1}} \sqrt{\dfrac{x^2-1}{x^2-4x+3}} =$ 0

(b) De la même manière, si $x \neq -1$, $\dfrac{x^2-1}{x^2-4x+3} = \dfrac{(x+1)}{(x-3)}$, sauf que, cette fois, au voisinage de -1, à droite de -1, $\dfrac{(x+1)}{(x-3)} < 0$; il est donc impossible de calculer la limite de $\sqrt{\dfrac{x^2-1}{x^2-4x+3}}$ lorsque x tend vers -1, à droite de -1.

Donc, $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} \sqrt{\dfrac{x^2-1}{x^2-4x+3}}$ n'existe pas.

7.1.9 Limites et relation d'ordre

1. **Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I telle que** $(\forall x \in I)\,(f(x) \geqslant 0)$
   On suppose que, pour $x_0 \in I$, $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} f(x) = l$
   Alors, $l \geqslant 0$
2. **Soit f et g deux fonctions numériques définies sur un intervalle I et telles que** $(\forall x \in I)\,(f(x) \leqslant g(x))$
   On suppose que, pour $x_0 \in I$, $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} f(x) = l_1$ **et** $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} g(x) = l_2$
   Alors, $l_1 \leqslant l_2$

Démonstration

1. **Démontrons le premier point**
   Nous allons faire un raisonnement par l'absurde.
   Supposons donc $l < 0$
   Si $l < 0$, alors $|l| > 0$. Il existe donc $\eta > 0$ tel que si $|x - x_0| < \eta$ alors $|f(x) - l| < \dfrac{|l|}{2}$
   Ainsi, si $|x - x_0| < \eta$ alors $-\dfrac{|l|}{2} + l < f(x) < l + \dfrac{|l|}{2} \iff \dfrac{3l}{2} < f(x) < \dfrac{l}{2} < 0$
   Ce qui sous entend que si $|x - x_0| < \eta$ alors $f(x) < 0$. ce qui est en contradiction avec l'hypothèse où, pour tout $x \in I, f(x) \geqslant 0$.
   Ainsi, l'hypothèse ahjoutée $l < 0$ est-elle absurde. Donc, $l \geqslant 0$
2. **Démontrons le second point**
   Le second point n'est qu'un corollaire du premier. En effet, si nous posons $h(x) = g(x) - f(x)$, alors, pour tout $x \in I$, nous avons $h(x) \geqslant 0$.
   D'autre part, $\lim\limits_{x \to x_0} h(x)$ existe, et nous avons même $\lim\limits_{x \to x_0} h(x) = \lim\limits_{x \to x_0} (g(x) - f(x)) = l_2 - l_1$
   D'après le point précédent, comme pour tout $x \in I$, nous avons $h(x) \geqslant 0$, nous avons $l_2 - l_1 \geqslant 0$, c'est à dire $l_2 \geqslant l_1$
   Ce que nous voulions

Remarque 3 :

Le résultat est tout à fait semblable si, pour tout $x \in I$, nous avons $(f(x) \leqslant 0)$ et si $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} f(x) = l$, alors, $l \leqslant 0$

7.1.10 Théorème des limites par encadrements

Soient f, g et h trois fonctions numériques définies sur un intervalle I telles que

$$(\forall x \in I)\,(f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x))$$

On suppose que, pour $x_0 \in I$**,** $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} h(x) = l$

Alors, $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} g(x) = l$

Démonstration

Nous devons donc évaluer $g(x) - l$. Or :

$$f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x) \Longrightarrow f(x) - l \leqslant g(x) - l \leqslant h(x) - l \Longrightarrow |g(x) - l| \leqslant \max\{|f(x) - l|\,; |h(x) - l|\}$$

Soit $\varepsilon > 0$

- ▷ Ecrivons que $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} f(x) = l$

  Il existe $\eta_f > 0$ rel que si $|x - x_0| < \eta_f$, alors $|f(x) - l| < \varepsilon$
- ▷ De même, écrivons que $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} h(x) = l$

  Il existe $\eta_h > 0$ rel que si $|x - x_0| < \eta_h$, alors $|h(x) - l| < \varepsilon$

Prenons $\eta = \inf\{\eta_f; \eta_h\}$. Alors, si $|x - x_0| < \eta$, alors $|h(x) - l| < \varepsilon$ et $|f(x) - l| < \varepsilon$ et donc $\max\{|f(x) - l|\,; |h(x) - l|\} < \varepsilon$.
Ainsi, si $|x - x_0| < \eta$, alors $|g(x) - l| < \varepsilon$.
Nous venons donc de montrer que $\lim\limits_{x \to x_0} g(x)$ existe et que $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = l$

Remarque 4 :

Ce résultat est aussi connu par le nom de Théorème des gendarmes ou encore, Théorème du sandwich...qui ne sont pas des appellations contrôlées.

Exercice 2 :

FIGURE 7.4 – Le graphe de la fonction $g(x) = x \times \left[\dfrac{1}{x}\right]$

Soit $g(x) = x \times \left[\dfrac{1}{x}\right]$ où $[x]$ désigne la partie entière de $x \in \mathbb{R}$ (cf graphe de la figure 7.4)

1. Donnez le domaine de définition de g

Résolution
Evidemennt, le domaine de définition est $\mathbb{R}^*$

2. (a) Montrer que nous avons, pour $x < 0$, $1 \leq g(x) < 1 - x$

Résolution
On suppose $x < 0$. Nous avons toujours : $\left[\frac{1}{x}\right] \leqslant \frac{1}{x} < \left[\frac{1}{x}\right] + 1$ En multipliant par x, négatif, nous inversons le sens des inégalités ; donc,

$$x\left[\frac{1}{x}\right] \geqslant x \times \frac{1}{x} > x\left[\frac{1}{x}\right] + x$$

C'est à dire $g(x) \geqslant 1 > g(x) + x$ Et nous avons donc : $1 \leqslant g(x) < 1 - x$

(b) Montrer que nous avons, pour $x > 0$, $1 - x < g(x) \leq 1$

Résolution
La résolution de cette question ne diffère pas de la précédente.
On suppose donc $x > 0$. Nous avons toujours : $\left[\frac{1}{x}\right] \leqslant \frac{1}{x} < \left[\frac{1}{x}\right] + 1$ En multipliant par x, positif, cette fois ci, nous avons :

$$x\left[\frac{1}{x}\right] \leqslant x \times \frac{1}{x} < x\left[\frac{1}{x}\right] + x$$

C'est à dire $g(x) \leqslant 1 < g(x) + x$ Et nous avons donc : $1 - x < g(x) \leqslant 1$

(c) En déduire $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} g(x)$

Résolution
Nous allons procéder en deux temps : à droite de 0, puis à gauche de 0.
— A gauche de 0, c'est à dire si $x < 0$, nous avons $1 \leq g(x) < 1 - x$, et en utilisant les limites par encadrement, nous avons $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} g(x) = 1$
— De même, à droite de 0, c'est à dire si $x > 0$, nous avons $1 - x < g(x) \leq 1$, et en utilisant les limites par encadrement, nous avons $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} g(x) = 1$

Nous avons donc g qui admet une limite à droite, et une limite à gauche, lesquelles sont égales à 1, et donc, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} g(x) = 1$

7.1.11 Quelques exercices

Exercice 3 :

On considère la fonction f ainsi définie :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = \dfrac{x}{\max(1, |x|)} \end{array} \right.$$

1. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous avons $|f(x)| \leqslant |x|$ et $|f(x)| \leqslant 1$
2. Donner $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$
3. Tracer le graphe de f

Exercice 4 :

Etudier les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x \neq -1}} \dfrac{x^3 + 3x^2 - 2x - 4}{x + 1}$
2. $\lim\limits_{x \to +4} \dfrac{\sqrt{x} - 2}{x^2 - 5x + 4}$
3. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 1} - 1}$
4. $\lim\limits_{x \to +2} \dfrac{\sqrt{x + 2} - 2}{\sqrt{x + 7} - 3}$