7.2 Limites infinies

7.2.1 Définitions

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I , et soit $x_0 \in I$

1. **On dit que f tend vers $+\infty$ quand x tend vers x_0 si**

$$(\forall A > 0)\,(\exists \eta_A > 0)\,(0 < |x - x_0| < \eta_A \Rightarrow f(x) > A)$$

et on écrit $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} f(x) = +\infty$

2. **On dit que f tend vers $-\infty$ quand x tend vers x_0 si**

$$(\forall A > 0)\,(\exists \eta_A > 0)\,(0 < |x - x_0| < \eta_A \Rightarrow f(x) < -A)$$

et on écrit : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} f(x) = -\infty$

3. **On dit que f tend vers l quand x tend vers $+\infty$ si**

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists A > 0)\,(x > A \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon)$$

et on écrit $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$

4. **De la même manière, on dit que f tend vers l quand x tend vers $-\infty$ si**

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists A > 0)\,(x < -A \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon)$$

et on écrit $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$

5. **On dit que f tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$ si**

$$(\forall A > 0)\,(\exists B > 0)\,(x > B \Rightarrow f(x) > A)$$

et on écrit $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

Exercice 5 :

Ecrire les définitions de :

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$
2. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$
3. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

Exercice 6 :

Le graphe de la figure 7.5 est celui de la fonction $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$; pour cette fonction f,

1. Trouver $\eta_A > 0$ tel que si $0 < x < \eta_A$, alors $f(x) > A$, où A est un nombre strictement positif quelconque
2. De la même manière, trouver $B > 0$, tel que si $x > B$, alors $|f(x) - 1| < \varepsilon$ où ε est un nombre strictement positif quelconque

Résolution

1. Soit $A > 0$; nous souhaitons avoir $e^{\frac{1}{x}} > A$; or,

$$e^{\frac{1}{x}} > A \Longleftrightarrow \frac{1}{x} > \ln A \Longleftrightarrow x < \frac{1}{\ln A}$$

Ainsi, il existe $\eta_A > 0$ et $\eta_A = \dfrac{1}{\ln A}$ tel que si $0 < x < \eta_A$, alors $f(x) > A$, où A est un nombre strictement positif quelconque

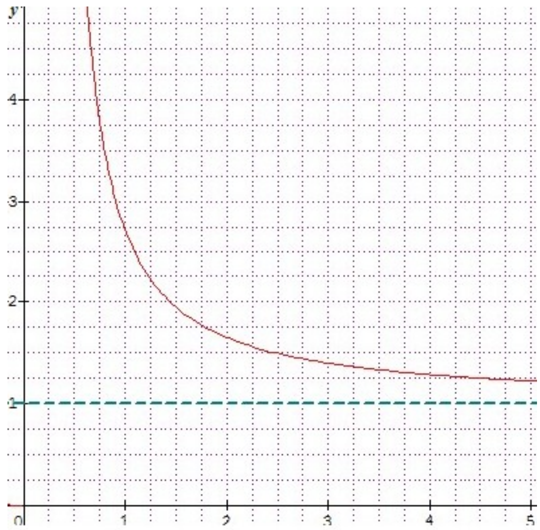

FIGURE 7.5 – Ici, nous avons : $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +1$

2. Soit $\varepsilon > 0$; nous souhaitons trouver $B > 0$ tel que tel que si $x > B$, alors $|f(x) - 1| < \varepsilon$
   — Remarquons tout de suite que si $x > 0$, alors $\dfrac{1}{x} > 0$ et $e^{\frac{1}{x}} > 1$; donc
   $$|f(x) - 1| < \varepsilon \Longleftrightarrow f(x) - 1 < \varepsilon$$
   — Or, $f(x) - 1 < \varepsilon$ est équivalent à $e^{\frac{1}{x}} - 1 < \varepsilon \Longleftrightarrow e^{\frac{1}{x}} < 1 + \varepsilon$
   — En passant au logarithme, nous avons $\dfrac{1}{x} < \ln(1 + \varepsilon)$, ce qui nous donne $x > \dfrac{1}{\ln(1 + \varepsilon)}$

   Ainsi, il existe $B > 0$ et $B = \dfrac{1}{\ln(1 + \varepsilon)}$, tel que si $x > B$, alors $|f(x) - 1| < \varepsilon$ où ε est un nombre strictement positif quelconque

7.2.2 Proposition

Soient f et g 2 fonctions numériques réelles, définies au moins sur un intervalle I, à valeurs dans $\mathbb{R}$. On suppose :

1. **Pour tout $x \in I$, $f(x) \leqslant g(x)$**
2. **Pour $x_0 \in I$, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$**

Alors $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = +\infty$

Démonstration

Soit $A > 0$
Alors, il existe $\eta_A > 0$ tel que si $|x - x_0| < \eta_A$, alors $f(x) > A$
Pour tout $x \in I$ tel que $|x - x_0| < \eta_A$, nous avons $g(x) \geqslant f(x) > A$.
Nous avons donc $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = +\infty$

Remarque 5 :

Ce résultat peut s'adapter très facilement à plein d'autres situations.

7.3 Synthèse sur les limites finies et infinies

Voici des tableaux qui tentent de faire des synthèses sur les opérations sur les limites ; les points d'interrogation « ? »désignent les cas d'indétermination

7.3.1 Addition

f \ g	$+\infty$	$-\infty$	l_1
$+\infty$	$+\infty$	?	$+\infty$
$-\infty$	?	$-\infty$	$-\infty$
l_2	$+\infty$	$-\infty$	$l_1 + l_2$

7.3.2 Produit

f \ g	$+\infty$	$-\infty$	l_1
$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	∞ dépend du signe de l_1
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	∞ dépend du signe de l_1
l_2	∞ dépend du signe de l_2	∞ dépend du signe de l_2	$l_1 \times l_2$

7.3.3 Quotient

On regarde le quotient $\dfrac{f}{g}$

g \ f	$+\infty$	$-\infty$	0	l_1
$+\infty$	?	?	0	0
$-\infty$	?	?	0	0
0	∞	∞	?	∞
l_2	∞	∞	0	$\dfrac{l_1}{l_2}$

Remarque 6 :

Il y a de nombreux cas d'indéterminations du type $\dfrac{\infty}{\infty}$, $+\infty - (+\infty)$, $\dfrac{0}{0}$, $0 \times \infty$, cas qu'il faut, à chaque fois, étudier de près.

Exercice 7 :

Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$

Résolution

Voici une question classique, peu difficile et qui se résoud toujours de la même manière, en prenant la valeur absolue.

Nous avons : $\left|\dfrac{\sin x}{x}\right| \leqslant \left|\dfrac{1}{x}\right|$. Or, $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x} = 0$, et donc, $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} \left|\frac{1}{x}\right| = 0$

Par les théorèmes de majoration, nous concluons donc que $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$

Exercice 8 :

Etudier les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \sqrt{x^2+1}+x$
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x+1}-\sqrt{x}$
3. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} x\sin\frac{1}{x}$
4. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3-x^2+1}{x^4-1}$
5. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^3+x^2+1}{x^3+2}$
6. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^4-x^2+1}{x^3-1}$
7. $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(e^x-e^{-x})-x$

Exercice 9 :

Donner, en fonction de $\alpha\in\mathbb{R}^+$ et de $\beta\in\mathbb{R}^+$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^4+2x+1}-\sqrt{\alpha x^4+\beta x+1}$