7.4 Fonctions continues

7.4.1 Introduction

1. Qu'est ce qu'une fonction continue ? Comment matérialiser, sur un graphe, physiquement, ce qu'est une fonction continue ?

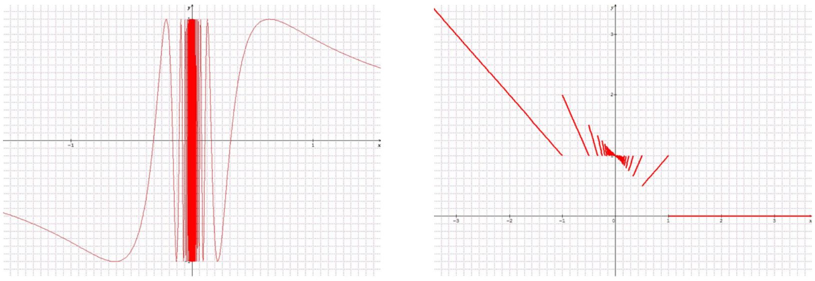

FIGURE 7.6 – Ces fonctions sont-elles continues ? Comment définir la continuité ?

2. Une idée de continuité, est de dire que pour tracer le graphe de f, il ne faut pas *"lever son crayon"*. C'est ce qu'on tente de formaliser dans dans la définition suivante.

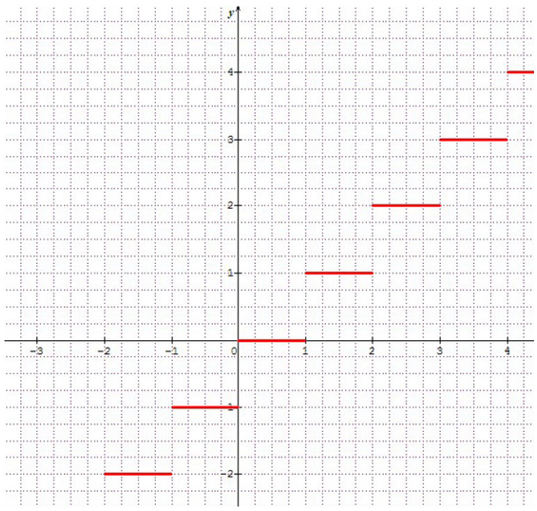

FIGURE 7.7 – Ainsi, la fonction **"Partie entière"**, notée $[x]$ est-elle continue sur tout intervalle $[n, n+1[$ avec $n \in \mathbb{Z}$, mais pas en $n_0 \in \mathbb{Z}$

7.4.2 Définition de fonction continue en un point

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction numérique d'une variable réelle et soit $x_0 \in I$.
On dit que f est continue en x_0 si et seulement si :

- $f(x_0)$ **existe**
- $\lim\limits_{x \to x_0} = f(x_0)$

Autrement dit, en utilisant la définition de la limite vue dans les paragraphes précédents 7.1.3 :
f est continue en x_0 si et seulement si

$$\boxed{(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \eta_\varepsilon > 0)\,/\,(|x - x_0| < \eta_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)}$$

Remarque 7 :

1. Une autre façon d'écrire que f est continue est de le dire comme ceci : $\lim\limits_{h \to 0} f(x_0 + h) = f(x_0)$ et $f(x_0)$ existe, c'est à dire :

$$\boxed{(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \eta_\varepsilon > 0)\,/\,(|h| < \eta_\varepsilon \Rightarrow |f(x_0 + h) - f(x_0)| < \varepsilon)}$$

2. L'étude des fonctions continues en un point se résume souvent à une étude de limites ; d'où la juxtaposition de ces 2 études

Exemple 4 :

Exemples de fonctions continues

1. $f(x) = ax + b$ **est une fonction continue en tout** $x_0 \in \mathbb{R}$**.** En effet :

   Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ et soit $\varepsilon > 0$
   Alors,
   $$|f(x) - f(x_0)| = |ax + b - (ax_0 + b)| = |ax - ax_0| = |a|\,|x - x_0|$$
   Ainsi, nous avons $|f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon$ dès que $|a|\,|x - x_0| \leq \varepsilon$, c'est à dire si $|x - x_0| \leq \dfrac{\varepsilon}{|a|}$;
   on choisit donc $\eta_\varepsilon = \dfrac{\varepsilon}{|a|}$

2. **La fonction** $g(x) = |x|$ **est continue en tout** $x_0 \in \mathbb{R}$

   Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ et soit $\varepsilon > 0$ Alors,
   $$|g(x) - g(x_0)| = ||x| - |x_0|| \leq |x - x_0|$$
   Ainsi, nous avons $|g(x) - g(x_0)| \leq \varepsilon$ dès que $|x - x_0| \leq \varepsilon$; on choisit donc $\eta = \varepsilon$

3. Est ce que $f(x) = \dfrac{2}{x - 1}$ est continue en $x = 1$?

   Evidemment non, puisque $f(1)$ n'est pas défini !!

7.4.3 Continuité à droite, continuité à gauche

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction numérique d'une variable réelle et soit $x_0 \in I$.

1. **On dit que f est continue à droite de x_0 si et seulement si :**
   — $f(x_0)$ **existe**
   — $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) = f(x_0)$
2. **On dit que f est continue à gauche de x_0 si et seulement si :**
   — $f(x_0)$ **existe**
   — $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = f(x_0)$

7.4.4 Théorème

f est continue en x_0, si et seulement si, f est continue à droite et à gauche de x_0

Démonstration

Ce théorème est la conséquence des résultats sur les limites

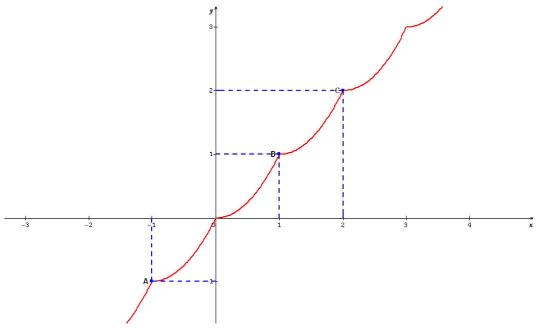

FIGURE 7.8 – Le graphe de la fonction $f(x) = [x] + (x - [x])^2$

Exercice 10 :

1. Etudier la continuité de $f(x) = [x] + (x - [x])^2$ en $n_0 \in \mathbb{Z}$

   Soit $n_0 \in \mathbb{Z}$ et nous allons étudier f sur l'intervalle $[n_0\ ;\ n_0 + 1[$, et, plus spécialement en n_0

   — Sur l'intervalle $[n_0\ ;\ n_0 + 1[$, nous avons $[x] = n_0$, et $f(x) = n_0 + (x - n_0)^2$. Sur cet intervalle, f est un polynôme du second degré, le calcul de la limite est donc facile : $\lim\limits_{\substack{x \to n_0 \\ x > n_0}} f(x) = n_0 = f(n_0)$
   f est donc continue à droite de n_0

   — Etudions la limite à gauche de n_0. Nous devons donc étudier f sur l'intervalle $[n_0 - 1\ ;\ n_0[$, et sur cet intervalle, f s'exprime par : $f(x) = n_0 - 1 + (x - n_0 + 1)^2$ et $\lim\limits_{\substack{x \to n_0 \\ x < n_0}} f(x) = n_0 = f(n_0)$
   f est donc continue à droite et à gauche de n_0, f est donc continue en n_0

   Elle est donc continue en $n_0 \in \mathbb{Z}$ (voir figure 7.8

2. La fonction $f(x) = (x - 1)[x]$ est-elle continue en $x = 1$, en $x = 2$?

   — Tout d'abord, si $x \in [0\ ;\ +1[$, alors $[x] = 0$, et f est nulle sur l'intervalle $[0\ ;\ +1[$; f est donc, en particulier, continue à gauche de 1.
   A droite de 1,$f(x) = (x - 1)$ et comme $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} f(x) = 0$; f est donc continue à droite de 1.
   f est donc continue en $x = 1$

   — Remarquons maintenant que $f(2) = 2$.
   A droite de 2,$f(x) = 2(x - 1)$ et comme $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x > 2}} f(x) = 2$; f est donc continue à droite de 2.

   — A gauche de 2,$f(x) = (x - 1)$ et comme $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x < 2}} f(x) = 1 \neq f(2)$; f n'est donc pas continue à gauche de 2.
   f n'est donc pas continue en $x = 2$ puisque non continue à gauche de 2

3. La fonction définie par : $f(x) = \dfrac{1}{e^{\frac{1}{x}} + 1}$ est-elle continue en 0 ?

   Nous avons $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} e^{\frac{1}{x}} + 1 = +\infty$ et donc, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \dfrac{1}{e^{\frac{1}{x}} + 1} = 0$

   De même, nous avons $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} e^{\frac{1}{x}} + 1 = +1$ et donc, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \dfrac{1}{e^{\frac{1}{x}} + 1} = 1$

   La limite à droite de 0 étant différente de la limite à gauche de 0, il est impossible que f soit continue en 0.

7.4.5 Théorème

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions numériques d'une variable réelle continues en $x_0 \in I$.Alors :

1. **Somme de fonctions continues : $f + g$ est continue en x_0**
2. **Produit de fonctions continues : $f \times g$ est continue en x_0**
3. **Produit par un scalaire : $(\forall \lambda \in \mathbb{R})\ \lambda \times f$ est continue en x_0**
4. **Quotient de fonctions continues : Si $g(x_0) \neq 0$, $\dfrac{f}{g}$ est continue en x_0**

Démonstration

Ce théorème est la conséquence des théorèmes sur les limites

7.4.6 Théorème

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction numérique d'une variable réelle continue en $x_0 \in I$ et telle que $f(I) \subset J$
Soit $g : J \to \mathbb{R}$, continue en $y_0 = f(x_0)$ Alors $g \circ f$ est continue en $x_0 \in I$

Démonstration

De même, ce théorème est la conséquence des théorèmes sur les limites

7.4.7 Prolongement par continuité

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction numérique d'une variable réelle et x_0 qui n'est pas dans I et répond aux critères de la remarque 7.1.2
On suppose $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$
Soit

$$\left[\begin{array}{rcl} g : I \cup \{x_0\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & g(x) = \begin{cases} f(x) \text{ si } x \neq x_0 \\ g(x_0) = l \end{cases} \end{array}\right.$$

Alors, g est continue en x_0. On dit que g est le prolongement par continuité de f en x_0

Exemple 5 :

1. Il y a un premier exemple, classique, c'est celui de la fonction $f(x) = x \ln x$ qui est définie sur $\mathbb{R}^{\star +}$
   Or, d'après les limites connues, $\lim\limits_{x \to 0} x \ln x = 0$. On peut donc prolonger f par continuité, en posant $f(0) = 0$
2. Le problème est évidemment le même pour $f_n(x) = x^n \ln x$, en posant $f_n(0) = 0$ $(n \in \mathbb{N}^\star)$

Exercice 11 :

1. Est-il possible de prolonger par continuité en 0, la fonction $f(x) = x \sin \dfrac{1}{x}$?

   Il suffit de chercher $\lim\limits_{x \to 0} x \sin \dfrac{1}{x}$. Or, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $\left| x \sin \dfrac{1}{x} \right| \leqslant |x|$

   On en déduit donc que $\lim\limits_{x \to 0} x \sin \dfrac{1}{x} = 0$ et qu'en posant $f(0) = 0$, on prolonge f par continuité en 0.
2. Est-il possible de prolonger par continuité en 0, la fonction $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$?

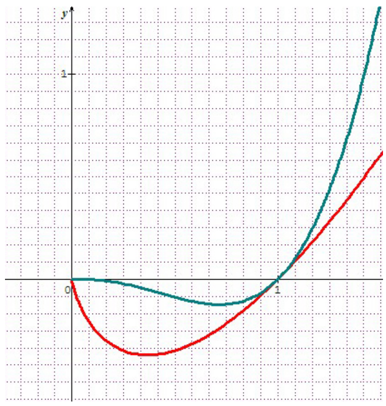

FIGURE 7.9 – Voici les graphes des fonctions $f_1(x) = x \ln x$ et $f_3(x) = x^3 \ln x$

Nous allons considérer 2 cas : le premier lorsque x tend vers zéro par valeurs positives et l'autre, lorsque x tend vers zéro par valeurs négatives.

— $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \dfrac{1}{x} = +\infty$, et donc $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} e^{\frac{1}{x}} = +\infty$
On peut donc d'ores et déjà conclure qu'il est impossible de prolonger f en 0 par continuité.

— Regardons cependant à gauche de 0
$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \dfrac{1}{x} = -\infty$, et donc $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} e^{\frac{1}{x}} = 0$
On peut , par contre, prolonger par continuité à gauche, en posant $f(0) = 0$. On obtient ainsi une fonction continue à gauche, mais non continue en 0.

7.4.8 Exercices

Exercice 12 :

C'est un exercice sur les traditionnelles questions de logique : contrapposée, réciproque.

1. Soient f et g deux fonctions numériques définies dans un intervalle I, et soit $x_0 \in I$; on sait que l'implication suivante :

$$\boxed{(f \text{ continue en } x_0 \text{ et } g \text{ continue en } x_0) \Rightarrow (fg \text{ continue en } x_0)}$$

est vraie. L'implication suivante :

$$\boxed{(fg \text{ non continue en } x_0) \Rightarrow ((f \text{ non continue en } x_0) \text{ ou } (g \text{ non continue en } x_0))}$$

est-elle vraie ?

2. Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} F(x) = \dfrac{1}{e^{\frac{1}{x}} + 1} \text{ si } x \neq 0 \\ F(0) = +1 \end{cases}$$

Etudier la continuité de F en 0

3. Soient G et H, les fonctions définies sur $\mathbb{R}$, par : $G(x) = x^2$ et $H(x) = x^2 + 1$; étudier la continuité des fonctions produit FG et FH en 0

4. L'implication

$$\boxed{(fg \text{ continue en } x_0) \Rightarrow ((f \text{ continue en } x_0) \text{ et } (g \text{ continue en } x_0))}$$

est-elle vraie, pour toute fonction f et g définies dans un intervalle I et $x_0 \in I$?

Exercice 13 :

Soit f une fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$, vérifiant la propriété suivante :

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \left(\lim_{h \to 0} \left(f\left(x+h\right) - f\left(x-h\right) = 0 \right) \right)$$

Cette fonction est-elle nécessairement continue sur $\mathbb{R}$?

Exercice 14 :

Étudier la continuité en $n_0 \in \mathbb{Z}$ de la fonction suivante : $g\left(x\right) = x + \sqrt{x - [x]}$