7.5 Fonctions continues sur un intervalle

Attention La notion d'intervalle est prise au sens large : ouvert, fermé, même $\mathbb{R}$ peut être pris comme un intervalle.

7.5.1 Définition

Soit f une fonction numérique définie sur $\mathcal{D}_f$, et soit $I \subset \mathcal{D}_f$
On dit que f est continue sur I, si et seulement si $(\forall x_0 \in I)$ f est continue en x_0

Exemple 6 :

Voici des exemples et contre-exemples :

1. $\tan x$ est continue sur $\left]-\frac{\pi}{2}; +\frac{\pi}{2}\right[$
2. $[x]$ est continue sur $]0, 1[$, mais pas sur $[0, 1]$ *(Attention aux bornes)*
3. $\frac{1}{x}$ n'est pas continue sur $[-1; +1]$; en effet, $\frac{1}{x}$ n'est pas définie en 0.

7.5.2 Théorème

Soient $f : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$ et $g : \mathcal{D}_g \to \mathbb{R}$ deux fonctions numériques d'une variable réelle continues sur $\mathcal{U} \subset (\mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g)$. Alors :

1. **Somme de fonctions continues : $f + g$ est continue sur $\mathcal{U}$**
2. **Produit de fonctions continues : $f \times g$ est continue sur $\mathcal{U}$**
3. **Produit par un scalaire : $(\forall \lambda \in \mathbb{R})$ $\lambda \times f$ est continue sur $\mathcal{U}$**
4. **Quotient de fonctions continues : Si $g(x) \neq 0$, pour tout $x \in \mathcal{U}$, $\frac{f}{g}$ est continue en $\mathcal{U}$**

Démonstration

Ce résultat est directement issu des théorèmes d'opérations sur les limites et sur les fonctions continues en un point.

7.5.3 Définition

Voici un retour à des définitions vues en mathématiques discrètes (cf 1.12.2)

1. **Soit $A \subset \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on appelle image directe de A par f, l'ensemble**

$$f(A) = \{y \in \mathbb{R} / y = f(x) \text{ où } x \in A\}$$

2. **Soit $A \subset \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on appelle image réciproque de A par f, l'ensemble**

$$f^{-1}(A) = \{x \in \mathbb{R} / f(x) \in A\}$$

7.5.4 Théorème *[Admis]*

Soit $f : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$, une fonction continue sur $\mathcal{U} \subset \mathcal{D}_f$.
Soit $I \subset \mathcal{U}$ un intervalle ; alors, $f(I)$ est aussi un intervalle.

Remarque 8 :

1. Par construction, f est surjective de I dans $f(I)$
2. Soient $y \in f(I)$ et $y' \in f(I)$; d'après le théorème ci-dessus, $f(I)$ étant un intervalle $[y\ y'] \subset f(I)$; donc, pour tout $z \in [y\ y']$, il existe $u \in I$ tel que $f(u) = z$

Exemple 7 :

On considère $f(x) = \sin x$, continue sur $\mathbb{R}$, donc
- Si $I = \mathbb{R}$, alors $f(I) = [-1; +1]$
- Si $I = [0, 2\pi[$, alors $f(I) = [-1; +1]$
- Si $I =]-2\pi, 2\pi[$, alors $f(I) = [-1; +1]$
- Si $I = \left]0, +\dfrac{\pi}{2}\right[$, alors $f(I) =]0; +1]$
- Si $I = [0, +\pi]$, alors $f(I) = [0; +1]$
- Si $I =]0, +\pi[$, alors $f(I) =]0; +1]$

On voit, d'après l'exemple ci-dessus,que $f(I)$, image directe de I par f n'est pas forcément de la même nature que I (ouvert ou fermé), mais, c'est un intervalle

Exercice 15 :

Soit f une fonction numérique, et A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. On note $f(A)$ l'image directe de A (c.f.7.5.3). Déterminez $f(A)$ dans les cas suivants :

1. $\underline{f(x) = x^2}$
   (a) $A =]-1, 2[$
   Question classique ! ! $f(A) = [0\ ;\ 4[$
   (b) $A =]-3; -1] \cup [2, 4[$
   $f(A) = [1\ ;\ 16[$
2. $\underline{f(x) = [x]}$
   La fonction étudiée ici est la partie entière
   (a) $A = [-5, 3]$
   $f(A) = \{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$
   (b) $A = \mathbb{R}^{\star+}$
   $f(A) = \mathbb{N}$
3. $\underline{f(x) = x - [x]}$
   Il faut remarquer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous avons : $[x] \leqslant x < [x]+1$. Donc, en soustrayant $[x]$ à chaque membre de l'égalité, nous obtenons : $0 \leqslant x - [x] < 1$, et ce, pour tout $x \in \mathbb{R}$
   (a) $A = \left[\dfrac{2}{3}, \dfrac{5}{3}\right]$
   $f(A) = [0\ ;\ 1[$
   (b) $A = \mathbb{R}$
   $f(A) = [0\ ;\ 1[$
   (c) Pour $\lambda \in [0\ ;\ 1[$ trouver $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = \lambda$
4. $\underline{f(x) = x^2 - 3x + 2}$
   Nous devons remarquer que f est décroissante sur $\left]-\infty\ ;\ \dfrac{3}{2}\right]$, puis croissante sur $\left[\dfrac{3}{2}\ ;\ +\infty\right[$.
   Le minimum est donc atteint en $f\left(\dfrac{3}{2}\right) = -\dfrac{1}{4}$
   (a) $A = [1, 2]$

$$f(A) = \left[-\frac{1}{4}\ ;\ 0\right]$$

(b) $A = [1, 2[$

$$f(A) = \left[-\frac{1}{4}\ ;\ 0\right]$$

(c) $A = \left]-\infty; \frac{3}{2}\right[$

$$f(A) = \left[-\frac{1}{4}\ ;\ +\infty\right[$$

7.5.5 Théorème de la valeur intermédiaire *[Admis et important]*

Soit f une fonction continue sur $\mathcal{U} \subset \mathcal{D}_f$. Soit $[a, b] \subset \mathcal{U}$. On dit que $[a, b]$ est un segment ou un compact de $\mathbb{R}$
Alors,

1. **f est bornée et atteint ses bornes**
2. **Pour tout $\lambda \in f([a, b])$, il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = \lambda$**

Remarque 9 :

Qu'est ce que « **bornée et atteint ses bornes** » veut dire ?

Bornée veut dire que $f([a, b]) = [m, M]$

Atteint ses bornes veut dire qu'il existe $x_0 \in [a, b]$ tel que $f(x_0) = m$ et qu'il existe $x_1 \in [a, b]$ tel que $f(x_1) = M$

Exemple 8 :

Soit $f(x) = x^2$ et $I = [0, 2]$; alors, $f(I) = [0, 4]$ et il existe $c \in [0, 2]$ tel que $f(c) = 1$ et la borne supérieure 4 est atteinte en $x = 2$

Exercice 16 :

On donne la fonction $f(x) = \left|x^2 - 2x\right|$, définie sur l'intervalle $[0; 3]$ et dont le graphe est donné par la figure 7.10

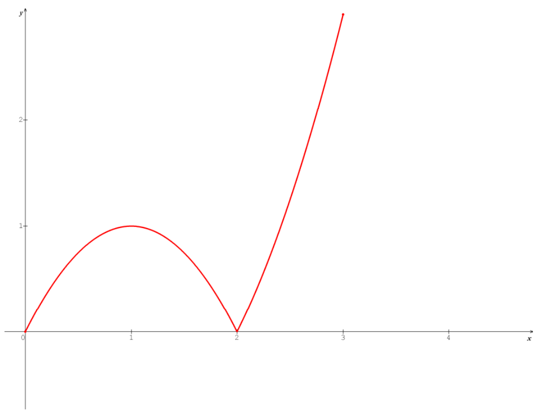

FIGURE 7.10 – Graphe de la fonction $f(x) = \left|x^2 - 2x\right|$

1. Démontrer qu'elle est strictement croissante sur $[0; 1]$, strictement décroissante sur $[1; 2]$ et strictement croissante sur $[2; 3]$

On regarde ces expressions en enlevant les valeurs absolues.

— Si $x \leqslant 0$ et si $x \geqslant 2$, alors $x^2 - 2x \geqslant 0$ et $\left|x^2 - 2x\right| = x^2 - 2x$. On en déduit donc que si $x \geqslant 2$, $x^2 - 2x$ et donc $\left|x^2 - 2x\right|$ est croissante.
La fonction $f(x)$ est donc strictement croissante sur $[2;3]$

— Maintenant, Si $0 \leqslant x \leqslant 2$, $x^2 - 2x \leqslant 0$ et $\left|x^2 - 2x\right| = -x^2 + 2x$. On en déduit donc que si $0 \leqslant x \leqslant 2$, $-x^2 + 2x$ et donc $\left|x^2 - 2x\right|$ est strictement croissante sur $[0;1]$ et strictement décroissante sur $[1;2]$
La fonction $f(x)$ est donc strictement croissante sur $[0;1]$, strictement décroissante sur $[1;2]$

2. Calculez $f(0)$ et $f(3)$. Soit λ un nombre compris entre $f(0)$ et $f(3)$; combien existe-t-il de nombres c tels que $f(c) = \lambda$? Discuter suivant les valeurs de λ

Evidemment, $f(0) = 0$ et $f(3) = 3$

La discussion peut se faire de manière géométrique :

— Si $\lambda = 0$, il n'y a que 2 solutions à l'équation $f(c) = \lambda$; ce sont $c = 0$ et $c = 2$
— Si $0 < \lambda < +$, il y a 3 solutions à l'équation $f(c) = \lambda$.
— Si $\lambda = 1$, il n'y a que 2 solutions à l'équation $f(c) = \lambda$, ; ce sont $c = 1$ et $2 < c < 3$
— Si $\lambda > 1$, il n'y a qu'une solution à l'équation $f(c) = \lambda$ où nous avons $2 < c < 3$

7.5.6 Application à la résolution d'équations : existence d'une solution

Soit f une fonction continue sur un segment $[a, b]$ tel que $f(a) \times f(b) < 0$
Alors, l'équation $f(x) = 0$ a au moins une solution dans $[a, b]$

Démonstration

Pour simplifier, supposons $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$; d'après les résultats précédents,$f([a, b])$ est un segment tel que $f(a) \in f([a, b])$ et $f(b) \in f([a, b])$, et donc $[f(a)\, f(b)] \subset f([a, b])$
Or, $0 \in [f(a)\, f(b)]$, et donc $0 \in f([a, b])$. Il existe donc $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = 0$, et $c \in \left]a; b\right[$, car $f(a) \times f(b) \neq 0$

Exemple 9 :

1. Soit $f(x) = (4x - 5)(x - 1)(4x - 3)$; les calculs de $f(0) = -15$ et de $f(2) = 15$ montrent qu'il existe $c \in \left]0; 2\right[$ tel que $f(c) = 0$

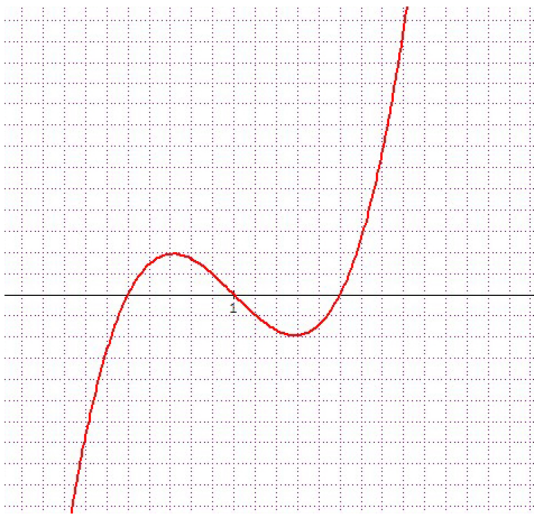

FIGURE 7.11 – Graphe de la fonction $f(x) = (4x - 5)(x - 1)(4x - 3)$

2. Soit $g(x) = (x-3)\left(x^2-1\right)$; le calcul de $g(0) = 3$ et de $g(2) = -3$ montrent qu'il existe $c \in]0;2[$ tel que $g(c) = 0$; en fait, il y en a 3
3. Se pose donc le problème de l'unicité des solutions.

7.6 Fonctions monotones sur un intervalle

7.6.1 Rappels

1. **On dit qu'une fonction f est strictement croissante sur I, si, pour tout $(x,y) \in I \times I$ nous avons l'implication**
$$x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$$
2. **On dit qu'une fonction f est strictement décroissante sur I, si, pour tout $(x,y) \in I \times I$ nous avons l'implication**
$$x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$$

7.6.2 Proposition

Soit f une fonction numérique d'une variable réelle. Si f est strictement monotone sur I alors f est injective de I dans $f(I)$

Démonstration

Nous allons utiliser la définition de fonction injective :

$$f \text{ est injective } \iff (\forall x \in I)(\forall y \in I)(x \neq y \Longrightarrow f(x) \neq f(y))$$

Soit f strictement monotone ; supposons f strictement croissante.
Soit $x \neq y$. Alors, de deux choses l'une : ou bien $x < y$ ou bien $y < x$.
Si $x < y$, alors $f(x) < f(y)$ donc $f(x) \neq f(y)$
Nous aurions la même démonstration si $y < x$. Donc, si f est strictement croissante, f est injective.
De même, on démontrerait que si f est strictement décroissante, alors f est injective.
Ce que nous voulions démontrer.

7.6.3 Théorème

Soit f une fonction numérique d'une variable réelle définie sur $\mathcal{D}_f$. Soit $I \subset \mathcal{D}_f$ et on suppose f continue et strictement monotone sur I.
Alors, f est une bijection de I sur $f(I)$

Démonstration

Le fait que f soit strictement monotone assure l'injectivité de f ; de plus, f est surjective de I dans $f(I)$; donc f est bijective.

7.6.4 Application à la résolution d'équation

Soit f une fonction numérique d'une variable réelle définie sur $\mathcal{D}_f$. Soit $[a;b] \subset \mathcal{D}_f$ et on suppose f continue et strictement monotone sur $[a;b]$ et telle que $f(a) \times f(b) < 0$
Alors, l'équation $f(x) = 0$ n'a qu'une seule solution dans $[a;b]$