11.9 Quelques exercices corrigés

11.9.1 Premiers exercices

Exercice 2 :

Soit f définie par :

$$\begin{cases} f:\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = \begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x} \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } = 0 \end{cases} \end{cases}$$

Il faut montrer que f est continue en 0, mais n'est pas dérivable en 0

Assez simple, puisque $\left|x\sin\dfrac{1}{x}\right| \leqslant |x|$ et donc $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\dfrac{1}{x} = 0$. f est donc continue en 0
Si nous faisons le rapport de dérivation :

$$\frac{f(x)-f(x)}{x} = \sin\frac{1}{x}$$

La fonction $\sin\dfrac{1}{x}$ n'admet pas de limite en 0, et donc le rapport $\dfrac{f(x)-f(x)}{x}$ n'en admet pas non plus. f n'est donc pas dérivable en 0

Exercice 3 :

Soit la fonction $f(x) = x^2\sin\frac{1}{x}$ définie pour $x \neq 0$ et $f(0) = 0$

1. *Montrer que f est dérivable en 0, et calculer $f^{'}(0)$*
2. *Calculer $f^{'}(x)$*
3. *$f^{'}(x)$ est-elle continue sur $\mathbb{R}$?*

Nous allons rédiger un corrigé qui ne suit pas complètement les questions posées.

1. **Tout d'abord, f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$**
   - ▷ Elle est continue sur $\mathbb{R}^*$ comme composée et produit de fonctions continues sur $\mathbb{R}^*$
   - ▷ Regardons la continuité en 0. Nous avons $\left|x^2\sin\dfrac{1}{x}\right| \leqslant x^2$ et donc $\lim\limits_{x\to 0} x^2\sin\dfrac{1}{x} = 0$. f est donc continue en 0
2. **f est une fonction dérivable en 0**
   Nous faisons donc le rapport de dérivation :
   $$\frac{f(x)-f(x)}{x} = x\sin\frac{1}{x}$$
   Or, $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\dfrac{1}{x} = 0$ et donc $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(x)}{x} = 0$ et $f'(0) = 0$
   f est donc dérivable en 0
3. **Calcul de $f'(x)$ pour $x \neq 0$**
   Nous avons $f'(x) = 2x\sin\frac{1}{x} + x^2 \times \left(\dfrac{-1}{x^2}\cos\dfrac{1}{x}\right) = 2x\sin\dfrac{1}{x} - \cos\dfrac{1}{x}$
4. **$f'(x)$ n'est pas continue en 0**
   Si $\lim\limits_{x\to 0} 2x\sin\dfrac{1}{x} = 0$, par contre $\lim\limits_{x\to 0}\cos\dfrac{1}{x}$ n'existe pas ; f' n'est donc pas continue en 0

Exercice 5 :

On considère, dans $\mathbb{R}^2$, l'ensemble $\Delta = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que} x+y=1\right\}$ (c'est une droite ! !). Minimiser, sur Δ l'expression x^2+y^2

Appelons $f(x,y) = x^2+y^2$. Il faut donc trouver $\inf\limits_{(x,y)\in\Delta} f(x,y)$

Si $(x,y) \in \Delta$, alors $x+y=1 \Longleftrightarrow y = 1-x$, et en appelant $\Phi(x) = f(x, 1-x) = x^2 + (1-x)^2$, il faut donc minimiser Φ.

Pour ce faire, on calcule la dérivée de Φ, nous en étudions le signe et en déduisons le minimum.

$\Phi'(x) = 4x-2$; Φ' s'annule en $x = \dfrac{1}{2}$, et le minimum est atteint en $x = \dfrac{1}{2}$. Le minimum est donc $\Phi\left(\dfrac{1}{2}\right) = f\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{4}$

Exercice 7 :

Calculer les dérivée premières des fonctions suivantes :

Il n'est pas sûr que nous développions les corrigés ; nous allons, par contre, donner les méthodes de calculs ;

1. $f_1(x) = \left(1-x^2\right)^2$

   Cette fonction f_1, est du type $f_1(x) = (u(x))^n$ dont la dérivée est donnée par $f_1'(x) = n(u(x))^{n-1} \times u'(x)$.
   Ici, nous avons donc : $f_1'(x) = 2\left(1-x^2\right) \times (-2x) = 4x\left(x^2-1\right)$.[1]

2. $f_2(x) = \dfrac{1}{\left(1-x^3\right)^2}$

   f_2 est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. Cette fonction f_2, est du type $f_2(x) = (u(x))^n$ (avec ici, $n=-2$) dont la dérivée est donnée par $f_2'(x) = n(u(x))^{n-1} \times u'(x)$.

   Donc : $f_2'(x) = -2\left(1-x^3\right)^{-3} \times -3x^2 = \dfrac{6x^2}{\left(1-x^3\right)^3}$

3. $f_3(x) = x \sin \dfrac{1}{x}$ *pour* $x \neq 0$

   Ici, f_3 est de la forme $f_3(x) = u(x)\,v(x)$ où $u(x) = x$ et $v(x) = \sin \dfrac{1}{x}$
   Donc,$f_3'(x) = u'(x)\,v(x) + u(x)\,v'(x)$
   Nous avons $v(x) = \sin \dfrac{1}{x} = \sin \circ i(x)$ où $i(x) = \dfrac{1}{x}$. Donc, $v'(x) = i'(x) \times \sin' \circ i(x) = \dfrac{-1}{x^2} \cos \dfrac{1}{x}$
   D'où $f_3'(x) = \sin \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x} \cos \dfrac{1}{x}$

4. $f_4(x) = \dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}$

   f_4 est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z}\}$
   Cette fois-ci, nous avons $f_4(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$ qui admet pour fonction dérivée $f_4'(x) = \dfrac{u'(x)\,v(x) - v'(x)\,u(x)}{v^2(x)}$
   où :
   $$\begin{array}{ll} u(x) = 1-\cos x & u'(x) = \sin x \\ v(x) = 1+\cos x & v'(x) = -\sin x \end{array}$$
   D'où $f_4'(x) = \dfrac{2\sin x}{(1+\cos x)^2}$

5. $f_5(x) = \sin x + \dfrac{1}{\cos x}$

   f_5 est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z}\right\}$

1. Bien sûr qu'on aurait pu développer ! !

$f_5(x) = \sin x + (\cos x)^{-1}$ et donc $f_5'(x) = \cos x + -1 \times (-\sin x)(\cos x)^{-2} = \cos x + \dfrac{\sin x}{\cos^2 x}$

6. $f_6(x) = \tan\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)$

   f_6 est définie, continue et dérivable pour $\dfrac{1-x}{1+x} \neq k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$, c'est à dire $x \neq \frac{1-\frac{\pi}{2}+k\pi}{1+\frac{\pi}{2}+k\pi}$ avec $k \in \mathbb{Z}$

   Ensuite, $f_6(x) = \tan u(x)$ dont la dérivée est donnée par $f_6'(x) = u'(x)\tan' u(x) = u'(x)\left(1+\tan^2 u(x)\right)$

   C'est à dire $f_6'(x) = \dfrac{-2}{(1+x)^2}\left(1+\tan^2\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)\right)$

7. $f_7(x) = \sqrt{1+\sin^2 x}$

   Comme $1+\sin^2 x \geqslant +1$, f_7 est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ en entier comme composée de fonctions continues et dérivables sur $\mathbb{R}$ en entier

   $f_7(x)$ est du type $f_7(x) = (u(x))^{\frac{1}{2}}$ dont la dérivée est $f_7'(x) = u'(x) \times \dfrac{1}{2} \times (u(x))^{\frac{-1}{2}}$.

   Donc, comme $u(x) = 1+\sin^2 x$, nous avons $u'(x) = 2\sin x\cos x = \sin 2x$.

   Donc $f_7'(x) = \dfrac{\sin 2x}{2} \times \dfrac{1}{\sqrt{1+\sin^2 x}}$

8. $f_8(x) = \sqrt{\dfrac{1}{\sin x}}$ *pour* $x \in]0,\pi[$

   Comme $x \in]0,\pi[$, nous avons $\sin x > 0$ et donc f_8 est complètement définie pour tout $x \in]0,\pi[$

   $f_8(x)$ est du type $f_8(x) = (u(x))^{\frac{-1}{2}}$ de dérivée $f_8'(x) = u'(x) \times \dfrac{-1}{2}(u(x))^{\frac{-3}{2}}$

   Donc, $f_8'(x) = \dfrac{-\cos x}{2\sin x\sqrt{\sin x}}$

9. $f_9(x) = \sqrt{\dfrac{1-\tan x}{1+\tan x}}$

   Pour que f_9 soit définie, continue il faut que $\dfrac{1-\tan x}{1+\tan x} \geqslant 0$ et $1+\tan x \neq 0$, c'est à dire $-1 \tan x \leqslant +1$ ou encore, $-\dfrac{\pi}{4} < x \leqslant \dfrac{\pi}{4}$, et pour qu'elle soit dérivable, il faut que $\dfrac{1-\tan x}{1+\tan x} > 0$

   Donc, f_9 est définie, continue sur $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]-\dfrac{\pi}{4}+k\pi;+\dfrac{\pi}{4}+k\pi\right]$ et dérivable sur $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]-\dfrac{\pi}{4}+k\pi;+\dfrac{\pi}{4}+k\pi\right[$

   Comme toujours, $f_9(x)$ est du type $f_9(x) = \sqrt{u(x)} = (u(x))^{\frac{1}{2}}$, de dérivée

   $$f_9'(x) = u'(x) \times \frac{1}{2} \times (u(x))^{\frac{-1}{2}}$$

   De $u(x) = \dfrac{1-\tan x}{1+\tan x}$, nous trouvons $u'(x) = \dfrac{-2\left(1+\tan^2 x\right)}{(1+\tan x)^2}$, d'où

   $$f_9'(x) = \frac{-\left(1+\tan^2 x\right)}{(1+\tan x)^2}\sqrt{\frac{1+\tan x}{1-\tan x}}$$

10. $f_{10}(x) = \ln\left(x^2+1\right)$

    Ici, c'est très simple ; comme $x^2+1>0$, f_{10} est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$

    De plus, $f_{10}(x)$ est du type $f_{10}(x) = \ln(u(x))$ dont la dérivée est donnée par $f_{10}'(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$

    Donc, ici, $f_{10}'(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$

11. $f_{11}(x) = e^{1+\frac{1}{x}}$

    Ici, ce n'est pas moins simple ! ! f_{11} est continue et dérivable sur $\mathbb{R}^*$

De plus, $f_{11}(x)$ est du type $f_{10}(x) = \exp(u(x))$ dont la dérivée est donnée par $f'_{11}(x) = u'(x)\exp(u'(x))$

Donc, ici, $f'_{10}(x) = \dfrac{-1}{x^2}e^{1+\frac{1}{x}}$

12. $f_{12}(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$

Rien à ajouter à la question au-dessus, et donc $f'_{12}(x) = -xe^{-\frac{x^2}{2}}$

Exercice 12 :

La fonction $f(x) = 2x + 1 + \dfrac{x^3 \sin x^2 + x^2}{2 + \sqrt{|x|}}$ est-elle dérivable en 0 ? Si oui, quelle est sa dérivée ?

Si l'exercice est posé, c'est qu'il y a une difficulté qui se pose en 0, puisqu'à priori, $\sqrt{|x|}$ n'est pas dérivable en 0. Pour tenter d'y voir clair, nous revenons à la définition.

- ▷ Premièrement, $f(0) = 1$
- ▷ Ensuite :

$$\begin{aligned}\frac{f(x) - f(0)}{x} &= \frac{2x + 1 + \dfrac{x^3 \sin x^2 + x^2}{2 + \sqrt{|x|}} - 1}{x} \\ &= \frac{2x + \dfrac{x^3 \sin x^2 + x^2}{2 + \sqrt{|x|}}}{x} \\ &= 2 + \frac{x^2 \sin x^2 + x}{2 + \sqrt{|x|}}\end{aligned}$$

- ▷ Et, pour terminer $\lim\limits_{x \to 0}$

  $dfracx^2 \sin x^2 + x2 + \sqrt{|x|} = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = 2$

Ainsi, f est dérivable en 0 et $f'(0) = 2$

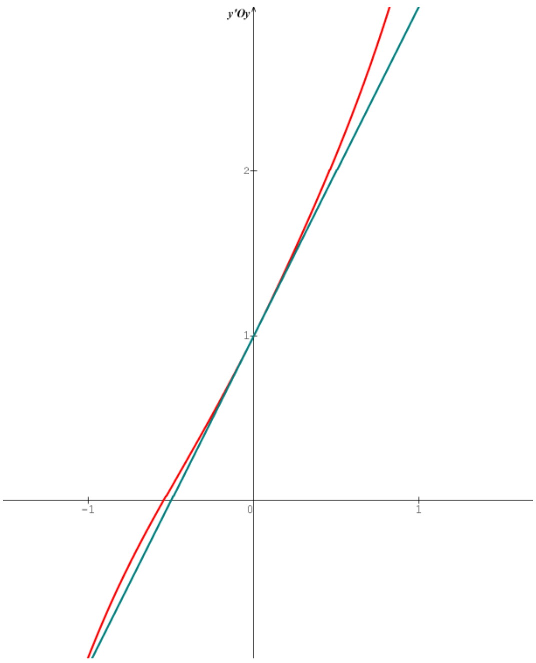

Figure 11.7 – Le graphe de la fonction $f(x) = 2x + 1 + \dfrac{x^3 \sin x^2 + x^2}{2 + \sqrt{|x|}}$ et la tangente au voisinage de $x = 0$

Exercice 13 :

1. *Etudiez la dérivabilité à droite et à gauche, en $x = 1$ et en $x = -1$ de la fonction $f(x) = |x^2 - 1|$*

   Nous allons tout d'abord exprimer f sans la valeur absolue ; elle est simple :

$$\begin{cases} f : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \quad x & \longmapsto & f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 \text{ si } -1 \leqslant x \leqslant +1 \\ x^2 - 1 \text{ sinon} \end{cases} \end{cases}$$

   Nous allons étudier f au voisinage de $x = 1$; l'étude en $x = -1$ est identique et peut se faire par parité de f

   ▷ Si $x \geqslant 1$, alors $f(x) = x^2 - 1$ et :

$$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{x^2 - 1}{x - 1} = x + 1$$

   Donc $\lim\limits_{\substack{x \to +1 \\ x > 1}} x + 1 = 2$ et donc $f'_d(1) = 2$

   ▷ Si $x \leqslant 1$, alors $f(x) = 1 - x^2$ et :

$$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{1 - x^2}{x - 1} = -(x + 1)$$

   Donc $\lim\limits_{\substack{x \to +1 \\ x < 1}} x + 1 = -2$ et donc $f'_g(1) = -2$

   Ainsi, f n'est pas dérivable en $x = 1$. De même, f n'est pas dérivable en $x = -1$

2. *La fonction $f(x) = x\sqrt{x}$ est-elle dérivable à droite de 0 ?*

   La réponse est OUI...

   Il suffit de faire le rapport de dérivation $\dfrac{f(x) - f(0)}{x} = \sqrt{x}$, et le calcul de la limite, à droite de 0 permet d'écrire que $f'_d(0) = 0$

Exercice 14 :

On pose $f(x) = (x + 1)\sqrt{|x^2 - 1|}$.

1. *Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.*

   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous avons $|x^2 - 1| \geqslant 0$; comme la fonction $\sqrt{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$, que le polynôme $x+1$ est continue sur $\mathbb{R}$, f est continue siur $\mathbb{R}$ comme produit et composée de fonctions continues.

2. *Etudier la dérivabilité de f et calculer f'*

   Si la fonction $\sqrt{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$, elle est, par contre dérivable sur $\mathbb{R}^{*+}$. Les points qui risquent de poser un souci sont donc en $x = 1$ et $x = -1$

   (a) **<u>Etude en $x = 1$</u>**

   ▷ Si $x > 1$
   Alors $x^2 - 1 \geqslant 0$ et $|x^2 - 1| = x^2 - 1$, d'où :

$$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{(x + 1)\sqrt{x^2 - 1}}{x - 1} = \frac{(x + 1)\sqrt{(x - 1)(x + 1)}}{x - 1} = \frac{(x + 1)\sqrt{x + 1}}{\sqrt{x - 1}}$$

   Donc, $\lim\limits_{\substack{x \to +1 \\ x > 1}} \dfrac{(x + 1)\sqrt{x + 1}}{\sqrt{x - 1}} = \lim\limits_{\substack{x \to +1 \\ x > 1}} \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1} = +\infty$, et donc f n'est pas dérivable en $x = 1$, à droite de 1

▷ <u>Si $x < 1$</u>
Alors $x^2 - 1 \leqslant 0$ et $\left|x^2 - 1\right| = 1 - x^2$, d'où :

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} &= \frac{(x+1)\sqrt{1-x^2}}{x-1} = \frac{(x+1)\sqrt{(1-x)(x+1)}}{x-1} \\ &= \frac{(x+1)\sqrt{(1-x)(x+1)}}{-(1-x)} = \frac{-(x+1)\sqrt{x+1}}{\sqrt{1-x}} \end{aligned}$$

Donc, $\lim\limits_{\substack{x \to +1 \\ x<1}} \frac{-(x+1)\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}} = \lim\limits_{\substack{x \to +1 \\ x<1}} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = -\infty$, et donc f n'est pas dérivable en $x = 1$, à gauche de 1

(b) <u>**Etude en $x = -1$**</u>

▷ <u>Etude à droite de-1, c'est à dire si $x > -1$</u>
Alors $x^2 - 1 \leqslant 0$ et $\left|x^2 - 1\right| = 1 - x^2$, d'où :

$$\frac{f(x) - f(-1)}{x+1} = \frac{(x+1)\sqrt{1-x^2}}{x+1} = \sqrt{1-x^2}$$

Donc, $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x>-1}} \sqrt{1-x^2} = \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x>-1}} \frac{f(x) - f(-1)}{x+1} = 0$, et donc f est dérivable en $x = -1$, à droite de -1 et $f'_d(-1) = 0$

▷ <u>Etude à gauche de-1, c'est à dire si $x < -1$</u>
Alors $x^2 - 1 \geqslant 0$ et $\left|x^2 - 1\right| = x^2 - 1$, d'où :

$$\frac{f(x) - f(-1)}{x+1} = \frac{(x+1)\sqrt{x^2-1}}{x+1} = \sqrt{x^2-1}$$

Donc, $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x<-1}} \sqrt{x^2-1} = \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x<-1}} \frac{f(x) - f(-1)}{x+1} = 0$, et donc f est dérivable en $x = -1$, à gauche de -1 et $f'_g(-1) = 0$

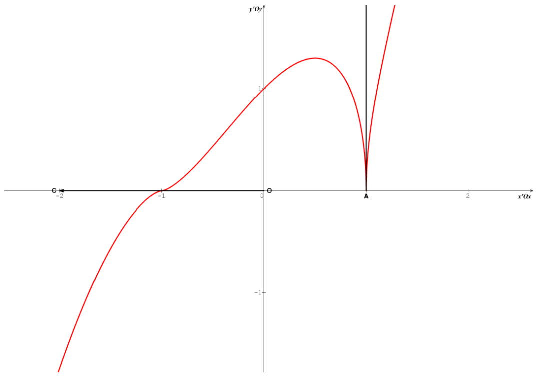

FIGURE 11.8 – Le graphe de la fonction $f(x) = (x+1)\sqrt{|x^2-1|}$ et les tangentes au voisinage de $x = +1$ et $x = -1$

Exercice 15 :

Soient $C_0, C_1, \ldots, C_n$ des constantes telles que $C_0 + \frac{C_1}{2} + \frac{C_2}{3} + \ldots + \frac{C_{n-1}}{n} + \frac{C_n}{n+1} = 0$
Montrer que l'équation $C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \ldots + C_{n-1}x^{n-1} + C_n x^n = 0$ a au moins une racine réelle comprise entre 0 et 1

Soit $F(x) = C_0 x + \frac{C_1 x^2}{2} + \frac{C_2 x^3}{3} + \ldots + \frac{C_{n-1}x^n}{n} + \frac{C_n x^{n+1}}{n+1}$.

Alors, $F(0) = 0$, et d'après l'hypothèse, $F(1) = 0$.
D'après le théorème de Rolle 11.4.3, il existe $c \in]0; +1[$ tel que $F'(c) = 0$. Or, $F'(x) = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \ldots + C_{n-1}x^{n-1} + C_n x^n$.
Il existe donc $c \in]0; +1[$ tel que $C_0 + C_1 c + C_2 c^2 + \ldots + C_{n-1}c^{n-1} + C_n c^n = 0$

Exercice 16 :

En utilisant le théorème des accroissements finis trouver un encadrement de :

1. $\sqrt{500} - \sqrt{499}$

   On considère la fonction $f(x) = \sqrt{x}$ sur l'intervalle $[499; 500]$ de dérivée $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ qui est telle que, si $x \in [499; 500]$, alors $\dfrac{1}{2\sqrt{500}} \leqslant \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \leqslant \dfrac{1}{2\sqrt{499}}$
   En appliquant le théorème des accroissements finis 11.4.5 sur l'intervalle $[499; 500]$, il existe $c \in [499; 500]$:
   $$\frac{\sqrt{500} - \sqrt{499}}{500 - 499} = \frac{1}{2\sqrt{c}} \iff \sqrt{500} - \sqrt{499} = \frac{1}{2\sqrt{c}}$$
   Or, $\dfrac{1}{2\sqrt{c}} \leqslant \dfrac{1}{2\sqrt{499}}$.
   Nous avons donc $0 \leqslant \sqrt{500} - \sqrt{499} \leqslant \dfrac{1}{2\sqrt{499}}$

2. $\ln(1001) - \ln(1000)$

   La méthode sera la même ! ! On considère la fonction $f(x) = \ln x$ sur l'intervalle $[1000; 1001]$ de dérivée $f'(x) = \dfrac{1}{x}$ qui est telle que, si $x \in [1000; 1001]$, alors $\dfrac{1}{1001} \leqslant \dfrac{1}{x} \leqslant \dfrac{1}{1000}$
   En appliquant le théorème des accroissements finis 11.4.5 sur l'intervalle $[1000; 1001]$, il existe $c \in [1000; 1001]$:
   $$\frac{\ln(1001) - \ln(1000)}{1001 - 1000} = \frac{1}{c} \iff \ln(1001) - \ln(1000) = \frac{1}{c}$$
   Or, $\dfrac{1}{c} \leqslant \dfrac{1}{1000}$.
   Nous avons donc $0 \leqslant \ln(1001) - \ln(1000) \leqslant \dfrac{1}{1000}$

Exercice 17 :

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{\sin x + \cos x}{1 + \cos^2 x}$ Montrer que, pour tout $a \in \mathbb{R}$, f' s'annule au moins une fois sur l'intervalle $[a; a + 2\pi]$

Assez simple ; la démonstration tient au fait que les fonctions $\sin x$ et $\cos x$ sont périodiques et de période $frm{-}e\pi$. Soit donc $a \in \mathbb{R}$; alors :

$$f(a + 2\pi) = \frac{\sin(a + 2\pi) + \cos(a + 2\pi)}{1 + \cos^2(a + 2\pi)} = \frac{\sin a + \cos a}{1 + \cos^2 a} = f(a)$$

Donc, d'après le théorème de Rolle 11.4.3, il existe $c \in [a; a + 2\pi]$ tel que $f'(c) = 0$.
Ce que nous voulions.

Exercice 18 :

Soit $f : [a; b] \longrightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction continue sur $[a; b]$ et dérivable sur $]a; b[$. Démontrer qu'il existe $c \in]a; b[$ tel que :

$$\frac{f(a)}{f(b)} = \exp\left(\frac{f'(c)}{f(c)}(b - a)\right)$$

On considère donc la fonction $g(x) = \ln f(x)$ de dérivée $g'(x) = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$.
En appliquant le théorème des accroissements finis 11.4.5 à g entre a et b, il existe $c \in]a;b[$ tel que :

$$\frac{g(b) - g(a)}{b - a} = g'(c) \Longleftrightarrow g(b) - g(a) = (b - a) g'(c) \Longleftrightarrow \ln\left(\frac{f(b)}{f(a)}\right) = (b - a) \frac{f'(c)}{f(c)}$$

En passant à l'exponentielle, nous avons :

$$\exp\left(\ln\left(\frac{f(b)}{f(a)}\right)\right) = \exp\left((b - a) \frac{f'(c)}{f(c)}\right) \Longleftrightarrow \frac{f(b)}{f(a)} = \exp\left((b - a) \frac{f'(c)}{f(c)}\right)$$

Ce que nous voulions.

Exercice 20 :

1. *Calculez les dérivées* n-ièmes *de* x^α *où* $\alpha \in \mathbb{R}$ *et* $x \in \mathbb{R}^{\star +}$
   - ▷ La dérivée première de x^α est $\alpha x^{\alpha - 1}$
   - ▷ La dérivée seconde de x^α est $\alpha(\alpha - 1) x^{\alpha - 2}$
   - ▷ On peut penser que, pour $n \geqslant 1$, la dérivée n-ième de x^α est $\prod\limits_{k=0}^{n-1} (\alpha - k) x^{\alpha - n}$ et nous allons le démontrer par récurrence
     - Vérifions que c'est vrai pour $n = 1$: $\prod\limits_{k=0}^{0} (\alpha - k) x^{\alpha - 1} = \alpha x^{\alpha - 1}$
     - Supposons que, pour $n \geqslant 1$, la dérivée n-ième de x^α est $\prod\limits_{k=0}^{n-1} (\alpha - k) x^{\alpha - n}$
     - Démontrons le à l'ordre $n + 1$
       La dérivée $n + 1$-ème de x^α est la dérivée première de la dérivée n-ième de x^α. Doonc :
       $$\left(\prod_{k=0}^{n-1} (\alpha - k) x^{\alpha - n}\right)' = (\alpha - n) \prod_{k=0}^{n-1} (\alpha - k) x^{\alpha - n - 1} = \prod_{k=0}^{n} (\alpha - k) x^{\alpha - (n+1)}$$

     Ce que nous voulions

   La dérivée *n-ièmes* de x^α où $\alpha \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}^{\star +}$ est donc $\prod\limits_{k=0}^{n-1} (\alpha - k) x^{\alpha - n}$

   Application : les dérivées n-ièmes de $R(x) = \sqrt{x}$
   Très simplement, $R(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$. Les dérivées n-ièmes de R sont donc :
   $$R^{(n)}(x) = \prod_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2} - k\right) x^{\frac{1}{2} - n} = \frac{(-1)^n}{2^n} \left(\prod_{k=0}^{n-1} (2k - 1)\right) x^{\frac{1}{2} - n}$$
   En particulier la dérivée première
   $$R'(x) = \frac{(-1)}{2} \left(\prod_{k=0}^{0} (2k - 1)\right) x^{\frac{1}{2} - 1} = \frac{-1}{2} \times (-1) \times x^{\frac{-1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

2. *Calculez les dérivées* n-ièmes *de* a^x *où* $x \in \mathbb{R}$ *et* $a > 0$

   Il est bien connu que l'on peut écrire $a^x = e^{x \ln a}$....Et que la dérivée n-ème de a^x est $(\ln a)^n e^{x \ln a} = (\ln a)^n a^x$ *(Se démontre par une récurrence sur n simple)*

3. *Rechercher les dérivées* n-ièmes *de* $\log_a(x)$

   Comme tout à l'heure, nous savons que $\log_a(x) = \dfrac{\ln x}{\ln a}$
   - ▷ La dérivée première de $\log_a(x)$ est donc $\log_a'(x) = \dfrac{1}{x \ln a} = \dfrac{1}{\ln a} x^{-1}$
   - ▷ La dérivée seconde de $\log_a(x)$ est donc $\dfrac{-1}{\ln a} x^{-2}$
   - ▷ On démontre, facilement, et par récurrence, que $\log_a^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{\ln a x^n}$

Exercice 22 :

L'objet de cet exercice est d'utiliser le rapport de dérivation pour lever des indéterminations ; c'est aussi l'outil utilisé pour donner les limites remarquables.

1. *Donner* $\lim\limits_{x \to e} \dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{e}}{\ln x - 1}$

   Nous sommes là, clairement devant une indétermination qu'il faut lever.

   $$\frac{\sqrt{x} - \sqrt{e}}{\ln x - 1} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{e}}{x - e} \times \frac{x - e}{\ln x - 1}$$

   Considérons, maintenant $f(x) = \sqrt{x}$ et $g(x) = \ln x$. Le rapport $\dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{e}}{\ln x - 1}$ devient alors :

   $$\frac{\sqrt{x} - \sqrt{e}}{\ln x - 1} = \frac{f(x) - f(e)}{x - e} \times \frac{x - e}{g(x) - g(e)}$$

   Or, f et g sont des fonctions dérivables en $x = e$ et nous avons :
   - ▷ $\lim\limits_{x \to e} \dfrac{f(x) - f(e)}{x - e} = f'(e) = \dfrac{1}{2\sqrt{e}}$
   - ▷ $\lim\limits_{x \to e} \dfrac{g(x) - g(e)}{x - e} = g'(e) = \dfrac{1}{e}$, ce qui nous donne $\lim\limits_{x \to e} \dfrac{x - e}{g(x) - g(e)} = e$

   Donc, $\lim\limits_{x \to e} \dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{e}}{\ln x - 1} = \dfrac{e}{2\sqrt{e}} = \dfrac{\sqrt{e}}{2}$

2. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{a^x - b^x}{c^x - d^x}$ *avec* $c \neq d$

   Il faut d'abord faire remarquer que $f_a(x) = a^x = e^{x \ln a}$, et c'est la même chose pour b^x, c^x et d^x
   - ▷ Nous pouvons, dans un premier temps écrire $\dfrac{a^x - b^x}{c^x - d^x} = \dfrac{a^x - b^x}{x} \times \dfrac{x}{c^x - d^x}$ et voir que $a^x - b^x = a^x - 1 + 1 - b^x$ de telle sorte que $\dfrac{a^x - b^x}{x} = \dfrac{a^x - 1 + 1 - b^x}{x} = \dfrac{a^x - 1}{x} + \dfrac{1 - b^x}{x}$
   - ▷ Etudions maintenant $\dfrac{a^x - 1}{x}$. En fait : $\dfrac{a^x - 1}{x} = \dfrac{f_a(x) - f_a(0)}{x}$

     Et donc
     $$\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{f_a(x) - f_a(0)}{x} = f_a'(0) = \ln a$$

     De même
     $$\lim_{x \to 0} \frac{1 - b^x}{x} = \lim_{x \to 0} -\frac{b^x - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{f_b(x) - f_b(0)}{x} = f_b'(0) = \ln b$$

     Et donc $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{a^x - b^x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{a^x - 1}{x} + \dfrac{1 - b^x}{x} \right) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{a^x - 1}{x} + \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - b^x}{x} = \ln a - \ln b$
   - ▷ Et, pour poursuivre, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{c^x - d^x} = \dfrac{1}{\ln c - \ln d}$

   En conclusion, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{a^x - b^x}{c^x - d^x} = \dfrac{\ln a - \ln b}{\ln c - \ln d}$

3. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(1 + x)^n - 1}{kx}$ *où* $k \neq 0$

   Appelons $f_n(x) = (1 + x)^n$. Alors, $\dfrac{(1 + x)^n - 1}{kx} = \dfrac{1}{k} \times \dfrac{f_n(x) - f_n(0)}{x}$

   Or, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f_n(x) - f_n(0)}{x} = f_n'(0) = n(1 + 0)^{n-1} = n$

   Donc, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(1 + x)^n - 1}{kx} = \dfrac{n}{k}$

Exercice 23 :

On pose $f(x) = xe^x$ et $g(x) = x\sin(x)$. Calculer l'expression de $f^{(n)}(x)$ et $g^{(n)}(x)$

1. **Expression de $f^{(n)}(x)$**
   - ▷ Tout d'abord $f'(x) = xe^x + e^x = e^x(x+1)$ et $f''(x) = e^x + e^x(x+1) = e^x(x+2)$
   - ▷ On peut penser que $f^{(n)}(x) = e^x(x+n)$
   - ▷ Démontrons, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $f^{(n)}(x) = e^x(x+n)$
     - C'est évidemment vrai pour $n = 0$
     - Supposons que pour $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(x) = e^x(x+n)$
     - Alors, $f^{(n+1)}(x) = \left(f^{(n)}\right)'(x) = e^x(x+n) + e^x = e^x(x+n+1)$

     Ce que nous voulions

   Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(x) = e^x(x+n)$
2. **Expression de $g^{(n)}(x)$**

   ...Ici, de la nécessité de bien connaître les formules trigonométriques!!
   - ▷ Tout d'abord
     - $g'(x) = x\cos x + \sin x = \sin x + x\sin\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$ car, d'après les formules trigonométriques, $\cos x = \sin\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$
     - Et $g''(x) = -x\sin x + \cos x + \cos x = 2\cos x - x\sin x = 2\sin\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) + x\sin(x+\pi)$
     - Pour la dérivée troisième, nous avons :

$$\begin{aligned} g^{(3)}(x) = & \ 2\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \sin(x+\pi) + x\cos(x+\pi) \\ = & -2\sin x - \sin x + x\cos(x+\pi) \ \text{ car } \ \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x \text{ et } \sin(x+\pi) = -\sin x \\ = & -3\sin x - x\cos x \\ = & \ 3\sin(x+\pi) + x\sin\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) \ \text{ car } \ -\cos x = \sin\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) \\ = & \ 3\sin\left(x + \frac{2\pi}{2}\right) + x\sin\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

   - ▷ Nous sommes en droit de penser que $g^{(n)}(x) = n\sin\left(x + (n-1)\dfrac{\pi}{2}\right) + x\sin\left(x + \dfrac{n\pi}{2}\right)$
   - ▷ Démontrons, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $g^{(n)}(x) = n\sin\left(x + (n-1)\dfrac{\pi}{2}\right) + x\sin\left(x + \dfrac{n\pi}{2}\right)$
     - C'est évidemment vrai pour $n = 0$ puisque $g^{(0)}(x) = x\sin x = g(x)$
     - Supposons que pour $n \in \mathbb{N}$, $g^{(n)}(x) = n\sin\left(x + (n-1)\dfrac{\pi}{2}\right) + x\sin\left(x + \dfrac{n\pi}{2}\right)$
     - Alors, $g^{(n+1)}(x) = \left(g^{(n)}\right)'(x) = n\cos\left(x + (n-1)\dfrac{\pi}{2}\right) + \sin\left(x + \dfrac{n\pi}{2}\right) + x\cos\left(x + \dfrac{n\pi}{2}\right)$

       Or, $\cos(\alpha) = \sin\left(\alpha + \dfrac{\pi}{2}\right)$. Donc :

$$\cos\left(x + (n-1)\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + (n-1)\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$$

       Et

$$\cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + (n+1)\frac{\pi}{2}\right)$$

       D'où $g^{(n+1)}(x) = (n+1)\sin\left(x + \dfrac{n\pi}{2}\right) + x\sin\left(x + (n+1)\dfrac{\pi}{2}\right)$

     Ce que nous voulions

   Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g^{(n)}(x) = n\sin\left(x + (n-1)\dfrac{\pi}{2}\right) + x\sin\left(x + \dfrac{n\pi}{2}\right)$

Exercice 25 :

Soit $\mathcal{P}$ le plan euclidien muni d'un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ orthonormé. Pour un point A et une droite $\mathcal{D}$ donnés du plan, on définit la distance de A à $\mathcal{D}$ par $d(A;\mathcal{D}) = \inf\limits_{M\in\mathcal{D}} AM$. On pose $A(x_0;y_0)$ et $\mathcal{D} : y = ax + b$. Calculer $d(A;\mathcal{D})$

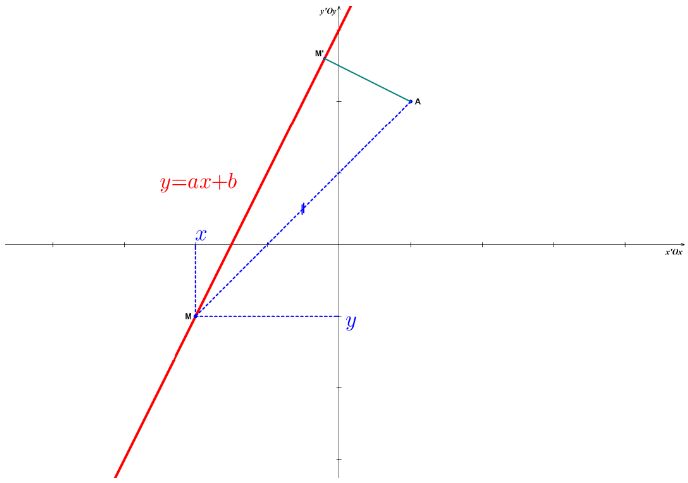

FIGURE 11.9 – Une visualisation de la situation

Exercice très intéressant !!
Soit $M\left(x,y\right)\in\mathcal{D}$; alors $y=ax+b$. Pour calculer $d(A;\mathcal{D})$, il faut minimiser la distance AM, ou, ce qui est équivalent, AM^2.
Or, de manière générale, $AM^2=\left(x_M-x_A\right)^2+\left(y_M-y_A\right)^2$ et, ici, $AM^2=\left(x-x_0\right)^2+\left(ax+b-y_0\right)^2$. Il faut donc minimiser la fonction f, dépendante de $x\in\mathbb{R}$, définie par :

$$f\left(x\right)=\left(x-x_0\right)^2+\left(ax+b-y_0\right)^2$$

Il faut donc étudier les variations de f. Assez simplement, la dérivée de f est

$$f'\left(x\right)=2\left(x-x_0\right)+2a\left(ax+b-y_0\right)=2\left(1+a^2\right)x-2\left(x_0+ay_0\right)$$

f' s'annule en $\omega=\dfrac{x_0+ay_0}{1+a^2}$

- Si $x\leqslant\omega$, alors $f'\left(x\right)\leqslant 0$ et f y est décroissante
- Si $x\geqslant\omega$, alors $f'\left(x\right)\geqslant 0$ et f y est croissante

Le minimum est donc atteint en $x=\alpha$

$$\begin{aligned}
f\left(\alpha\right) &= \left(\frac{x_0+ay_0}{1+a^2}-x_0\right)^2+\left(a\frac{x_0+ay_0}{1+a^2}+b-y_0\right)^2\\
&= \frac{a^2\left(ax_0-y_0\right)^2}{\left(1+a^2\right)^2}+\frac{\left(ax_0-y_0+b\left(1+a^2\right)\right)^2}{\left(1+a^2\right)^2}\\
&= \frac{a^2\left(ax_0-y_0\right)^2}{\left(1+a^2\right)^2}+\frac{\left(ax_0-y_0\right)^2+b^2\left(1+a^2\right)^2+2b\left(1+a^2\right)\left(ax_0-y_0\right)}{\left(1+a^2\right)^2}\\
&= \frac{\left(ax_0-y_0\right)^2}{1+a^2}+\frac{b^2}{1+a^2}+\frac{2b\left(ax_0-y_0\right)}{1+a^2}\\
&= \frac{\left(ax_0+b-y_0\right)^2}{1+a^2}
\end{aligned}$$

Donc $d(A;\mathcal{D})=\dfrac{\left|ax_0+b-y_0\right|}{\sqrt{1+a^2}}$

Remarque

En fait, $d(A;\mathcal{D})=AM'$ où M' est la projection orthogonale de A sur la droite $\mathcal{D}$; et donc α est l'abscisse de M'

Exercice 26 :

Soit $n \in \mathbb{N}$, on pose : $\left\{\begin{array}{rcl} f_n : [0;1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f_n(x) = e^{-x}\left(1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!}\right) \end{array}\right.$

1. *Calculer $f_n'(x)$. Puis trouver un encadrement de f_n' sur $[0;1]$.*

   ▷ Pour calculer la dérivée, nous allons appeler $S_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$; de telle sorte que $f_n(x) = e^{-x} S_n(x)$
   La dérivée de f_n est donc : $f_n'(x) = e^{-x} S_n'(x) - e^{-x} S_n(x) = e^{-x}\left(S_n'(x) - S_n(x)\right)$
   Qu'est donc $S_n'(x)$?

$$S_n'(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{kx^{k-1}}{k!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{kx^{k-1}}{k!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!}$$

   Ainsi :

$$S_n'(x) - S_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = -\frac{x^n}{n!}$$

   Donc, $f_n'(x) = -e^{-x} \times \dfrac{x^n}{n!}$
   Ce qui montre que f_n' est négative sur l'intervalle $[0;1]$ et que f_n y est décroissante.
   Ainsi, pour tout $x \in [0;1]$, $f_n(1) \leqslant f_n(x) \leqslant f_n(0) \Longleftrightarrow f_n(1) \leqslant f_n(x) \leqslant 1$

   ▷ <u>Nous allons montrer que, pour tout $x \in [0;1]$, nous avons $f_n'(x) \geqslant -\dfrac{x^n}{n!}$</u>
   Pour ce faire, étudions $f_n'(x) + \dfrac{x^n}{n!}$:

$$f_n'(x) + \frac{x^n}{n!} = -e^{-x} \times \frac{x^n}{n!} + \frac{x^n}{n!} = \frac{x^n}{n!}\left(1 - e^{-x}\right)$$

   Comme, pour tout $x \in [0;1]$, nous avons $e^{-1} \leqslant e^{-x} \leqslant 1$, nous avons $1 - e^{-x} \geqslant 0$ et donc $f_n'(x) + \dfrac{x^n}{n!} \geqslant 0$, ce qui signifie que $f_n'(x) \geqslant -\dfrac{x^n}{n!}$
   En conclusion, nous avons $-\dfrac{x^n}{n!} \leqslant f_n'(x) \leqslant 0$

2. *Montrer que* $-\dfrac{1}{(n+1)!} \leqslant e^{-1}\left(1 + 1 + \dfrac{1}{2!} + \dfrac{1}{3!} + \cdots + \dfrac{1}{n!}\right) - 1 \leqslant 0$

   Nous devons donc montrer que $-\dfrac{1}{(n+1)!} \leqslant f_n(1) - 1 \leqslant 0$

   ▷ Dans la question 1, nous avons établi que $f_n(1) \leqslant 1 \Longleftrightarrow f_n(1) - 1 \leqslant 0$

   ▷ Il faut, maintenant, montrer que $-\dfrac{1}{(n+1)!} \leqslant f_n(1) - 1$
   Nous allons utiliser une fonction auxiliaire Φ définie sur $[0;1]$ par :

$$\Phi(x) = f_n(x) - 1 + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

   Alors, $\Phi'(x) = f_n'(x) + \dfrac{x^n}{n!}$. Et, de la question 1, où nous avons montré que, pour tout $x \in [0;1]$ $f_n'(x) \geqslant -\dfrac{x^n}{n!}$, nous avons, pour tout $x \in [0;1]$, $\Phi'(x) \geqslant 0$
   Ainsi, Φ est croissante sur $[0;1]$ et nous avons $\Phi(0) \leqslant \Phi(x) \leqslant \Phi(1)$
   Or : $\Phi(0) = f_n(0) - 1 = 0$ et $\Phi(1) = f_n(1) - 1 + \dfrac{1}{(n+1)!}$. Donc :

$$\Phi(1) \geqslant 0 \Longleftrightarrow f_n(1) - 1 + \frac{1}{(n+1)!} \geqslant 0 \Longleftrightarrow f_n(1) - 1 \geqslant -\frac{1}{(n+1)!}$$

Nous avons donc démontré que $-\dfrac{1}{(n+1)!} \leqslant e^{-1}\left(1+1+\dfrac{1}{2!}+\dfrac{1}{3!}+\cdots+\dfrac{1}{n!}\right)-1 \leqslant 0$

3. *Calculer* $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{1}{k!}$.

D'après l'inégalité $-\dfrac{1}{(n+1)!} \leqslant f_n(1)-1 \leqslant 0 \Longleftrightarrow -\dfrac{1}{(n+1)!} \leqslant e^{-1}S_n(1)-1 \leqslant 0$ et le théorème des limites par encadrements 9.4.10, nous pouvons dire que $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{-1}S_n(1)-1=0$, c'est à dire :

$$\lim_{n\to+\infty} e^{-1}S_n(1)-1=0 \Longleftrightarrow \lim_{n\to+\infty} e^{-1}S_n(1)=1 \Longleftrightarrow \lim_{n\to+\infty} S_n(1)=e$$

Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{1}{k!}=e$

Exercice 27 :

Soit $a\in\mathbb{R}$ et f une fonction numérique définie sur un intervalle de la forme $I=]a-\varepsilon;a+\varepsilon]$, où $\varepsilon>0$.
On appelle dérivée centrale de f en a, le nombre $f_c(a)=\lim\limits_{\substack{h\to0\\h>0}}\dfrac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$ si cette limite existe.

1. *Montrer que si f est dérivable en a, alors elle admet une dérivée centrale en a*

   On suppose f dérivable en a, alors $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a)$. Or :

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\frac{1}{2}\left(\frac{f(a+h)-f(a)}{h}+\frac{f(a)-f(a-h)}{h}\right)$$

   Ainsi :

$$\lim_{\substack{h\to0\\h>0}}\frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}=\frac{1}{2}\left(\lim_{\substack{h\to0\\h>0}}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}+\lim_{\substack{h\to0\\h<0}}\frac{f(a-h)-f(a)}{-h}\right)=\frac{1}{2}\left(2f'(a)\right)=f'(a)$$

2. *N'est-il pas possible de donner une condition plus faible ?*

   Il est possible de ne se donner qu'une condition plus faible. Supposons que f admette en a, une dérivée à droite $f'_d(a)$ et une dérivée à gauche de a $f'_g(a)$ qui peuvent être différentes *(c'est à dire que f peut ne pas être dérivable)*
   Nous avons donc $\lim\limits_{\substack{h\to0\\h>0}}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'_d(a)$ et $\lim\limits_{\substack{h\to0\\h<0}}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'_g(a)$,ou, ce qui est équivalent, $\lim\limits_{\substack{h\to0\\h>0}}\dfrac{f(a-h)-f(a)}{-h}=f'_g(a)$
   A ce moment là,

$$\lim_{\substack{h\to0\\h>0}}\frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}=\frac{1}{2}\left(\lim_{\substack{h\to0\\h>0}}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}+\lim_{\substack{h\to0\\h>0}}\frac{f(a-h)-f(a)}{-h}\right)=\frac{1}{2}\left(f'_d(a)+f'_g(a)\right)$$

3. *Avons-nous la réciproque ? (c'est à dire que si f admet une dérivée centrale en a, est-elle dérivable en a ?*

   La fonction $f(x)=|x|$ n'est pas dérivable en $x=0$. Au voisinage de 0 :

$$\frac{f(0+h)-f(0-h)}{2h}=\frac{|h|-|-h|}{2h}=0$$

   Donc, $f(x)=|x|$ admet une dérivée centrale en $x=0$, laquelle est nulle, alors qu'elle n'est pas dérivable en $x=0$

Exercice 28 :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sqrt{\cos x} + \sqrt{\sin x} = 1$

Première remarque, c'est que cette équation a au moins 2 solutions : $x = 0$ et $x = \dfrac{\pi}{2}$. Sont-les seules ?

Pour le savoir, considérons $f(x) = \sqrt{\cos x} + \sqrt{\sin x}$

- ▷ Intéressons nous au domaine de définition de f que nous notons $\mathcal{D}_f$

  Nous avons, bien entendu $x \in \mathcal{D}_f \iff \cos x \geqslant 0$ et $\sin x \geqslant 0 \iff 2k\pi \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$

  Autrement dit, $\mathcal{D}_f = \bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}} \left[2k\pi; \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi\right]$
- ▷ D'autre part, f est périodique et de période 2π ; nous n'étudions donc f que sur $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$
- ▷ f est continue sur $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$ et dérivable sur $\left]0; \dfrac{\pi}{2}\right[$

  Nous avons $f'(x) = \dfrac{-\sin x}{\sqrt{\cos x}} + \dfrac{\cos x}{\sqrt{\sin x}} = \dfrac{(\cos x)^{\frac{3}{2}} - (\sin x)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\cos x}\sqrt{\cos x}}$
  - Si $0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{4}$, alors $\cos x \geqslant \sin x$ et $f'(x) \geqslant 0$ et f y est croissante
  - Si $\dfrac{\pi}{4} \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2}$, alors $\cos x \leqslant \sin x$ et $f'(x) \leqslant 0$ et f y est décroissante
  - f atteint donc un maximum en $x = \dfrac{\pi}{4}$ et, pour tout $x \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$, nous avons $f(x) \geqslant 1$. Sur l'intervalle $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$, les seules valeurs telles que $f(x) = 1$ sont $x = 0$ et $x = \dfrac{\pi}{2}$

Toutes les solutions de l'équation $\sqrt{\cos x} + \sqrt{\sin x} = 1$ sont donc de la forme $x = 2k\pi$ ou $x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

Exercice 29 :

1. *Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,*

$$\sqrt{2} \leqslant \cos x + \sin x \leqslant \sqrt{2} \text{ et } -\sqrt{2} \leqslant -\cos x + \sin x \leqslant \sqrt{2}$$

   Nous n'allons corriger que la proposition $\sqrt{2} \leqslant \cos x + \sin x \leqslant \sqrt{2}$ vraie pour tout $x \in \mathbb{R}$. L'autre proposition se démontre de la même manière.

   Nous posons $F(x) = \cos x + \sin x$. Cette fonction F est définie sur $\mathbb{R}$ en entier et est périodique et de période 2π et nous ne l'étudierons que sur l'intervalle $[0; 2\pi]$

   Nous avons $F(x) = \cos x - \sin x$ et nous avons le tableau de variations suivant :

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{4}$		π		$\frac{5\pi}{4}$		$\frac{3\pi}{2}$		$\frac{7\pi}{4}$		2π
f'	1	+	0	-	-	-	-	-	-	-	-1	-	0	+	+	+	1
f	$\nearrow$	$\nearrow$	$\sqrt{2}$	$\searrow$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	-1	$\searrow$	$-\sqrt{2}$	$\nearrow$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1

   Ainsi, d'après le tableau ci-dessus, on peut déduire que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sqrt{2} \leqslant \cos x + \sin x \leqslant \sqrt{2}$

2. *Pour $t \in \mathbb{R}$, on considère la fonction $f_t(x) = \cos tx + \sin tx$; montrer que si $|t| < \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, alors l'équation $f_t(x) = x$ admet une unique solution*

   Supposons $|t| < \dfrac{1}{\sqrt{2}}$; ceci veut dire que $\dfrac{-1}{\sqrt{2}} < x < \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Pour démontrer que $f_t(x) = x$ admet une unique solution, nous allons étudier la fonction $\Phi(x) = f_t(x) - x$.

   Il faut remarquer, pour tout $t \in \mathbb{R}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, et d'après la première question, nous avons $-\sqrt{2} \leqslant \cos tx + \sin tx \leqslant \sqrt{2}$ bornée, et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \Phi(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \Phi(x) = +\infty$

   - ▷ Supposons $0 \leqslant t < \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

     Etudions la dérivée de $\Phi(x)$.

$$\Phi'(x) = f_t'(x) - 1 = t\cos tx - t\sin tx - 1 = t(\cos tx - \sin tx) - 1$$

De $0 \leqslant t < \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, nous déduisons $0 \leqslant t(\cos tx - \sin tx) \leqslant 1$, c'est à dire que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\Phi'(x) \leqslant 0$ et donc que Φ est décroissante et continue ; Φ est donc bijective de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$; il existe donc un seul nombre $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $\Phi(x_0) = 0 \Longleftrightarrow f_t(x_0) = x_0$

▷ Supposons maintenant que $-\dfrac{1}{\sqrt{2}} < t \leqslant 0$

Alors, de $-\sqrt{2} \leqslant \cos tx - \sin tx \leqslant +\sqrt{2}$, on tire $-1 \leqslant t(\cos tx - \sin tx) \leqslant +1$ et donc que $\Phi'(x) \leqslant 0$. Et nous concluons comme précédemment.

Ainsi, si $|t| < \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, alors l'équation $f_t(x) = x$ admet une unique solution.

Exercice 30 :

Soit $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $\mu \geqslant 1$

1. *En étudiant les variations de la fonction $\varphi(x) = \dfrac{1+x^\mu}{(1+x)^\mu}$ définie pour $x \in [0;1]$, démontrer que, pour tout $x \in [0;1[$, nous avons : $2^{1-\mu} \leqslant \dfrac{1+x^\mu}{(1+x)^\mu} \leqslant 1$*

Soit donc $\varphi(x) = \dfrac{1+x^\mu}{(1+x)^\mu}$ dont nous allons calculer la dérivée :

$$\begin{cases} u = 1 + x^\mu & u' = \mu x^{\mu-1} \\ v = (1+x)^\mu & v' = \mu(1+x)^{\mu-1} \end{cases}$$

D'où :

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &= \frac{\mu x^{\mu-1}(1+x)^\mu - \mu(1+x)^{\mu-1}(1+x^\mu)}{(1+x)^{2\mu}} \\ &= \frac{\mu(1+x)^{\mu-1}\left(x^{\mu-1}(1+x) - (1+x^\mu)\right)}{(1+x)^{2\mu}} \\ &= \frac{\mu\left(x^{\mu-1}(1+x) - (1+x^\mu)\right)}{(1+x)^{\mu+1}} \\ &= \frac{\mu\left(x^{\mu-1} - 1\right)}{(1+x)^{\mu+1}} \end{aligned}$$

De $\mu \geqslant 1$ et de $x \in [0;1]$, nous déduisons que $\mu\left(x^{\mu-1} - 1\right) \leqslant 0$, donc que φ est une fonction décroissante sur l'intervalle $[0;1]$. D'où :

$$\varphi(0) \geqslant \varphi(x) \geqslant \varphi(1) \Longleftrightarrow 1 \geqslant \frac{1+x^\mu}{(1+x)^\mu} \geqslant 2^{1-\mu}$$

Ce que nous voulions

Il est possible d'aller plus loin !

Soit $x \in \mathbb{R}$ avec $x \geqslant 1$, alors $0 < \dfrac{1}{x} \leqslant 1$, et on peut alors appliquer à $\dfrac{1}{x}$ l'inégalité ci-dessus :

$$2^{1-\mu} \leqslant \frac{1 + \left(\frac{1}{x}\right)^\mu}{\left(1 + \frac{1}{x}\right)^\mu} \leqslant 1 \Longleftrightarrow 2^{1-\mu} \leqslant \frac{x^\mu + 1}{(x+1)^\mu} \leqslant 1$$

On peut donc ainsi écrire que pour tout $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $\mu \geqslant 1$ et tout $x \in \mathbb{R}$,

$$2^{1-\mu} \leqslant \frac{1+x^\mu}{(1+x)^\mu} \leqslant 1$$

2. *De même, montrer que, pour tout $x \in [0;1[$, nous avons : $\dfrac{1-x^\mu}{(1-x)^\mu} \geqslant 1$*

De la même manière, nous considérons $\Phi(x) = \dfrac{1-x^\mu}{(1-x)^\mu}$ dont nous allons calculer la dérivée :

$$\begin{cases} u = 1 - x^\mu & u' = -\mu x^{\mu-1} \\ v = (1-x)^\mu & v' = -\mu(1-x)^{\mu-1} \end{cases}$$

D'où :

$$\begin{aligned} \Phi'(x) &= \frac{-\mu x^{\mu-1}(1-x)^\mu + \mu(1-x)^{\mu-1}(1-x^\mu)}{(1-x)^{2\mu}} \\ &= \frac{\mu(1-x)^{\mu-1}\left(-x^{\mu-1}(1-x) + (1-x^\mu)\right)}{(1-x)^{2\mu}} \\ &= \frac{\mu\left(-x^{\mu-1}(1-x) + (1-x^\mu)\right)}{(1-x)^{\mu+1}} \\ &= \frac{\mu\left(1-x^{\mu-1}\right)}{(1-x)^{\mu+1}} \end{aligned}$$

De $\mu \geqslant 1$ et de $x \in [0;1[$, nous déduisons que $\mu\left(1-x^{\mu-1}\right) \geqslant 0$, donc que Φ est une fonction croissante sur l'intervalle $[0;1[$. D'où :

$$\varphi(0) \leqslant \varphi(x) \Longleftrightarrow 1 \leqslant \frac{1-x^\mu}{(1-x)^\mu}$$

<u>**Est-il possible d'itérer ce que nous avons fait dans la question précédente ?**</u>

Soit donc $x \in \mathbb{R}$ tel que $x > 1$; alors $0 < \dfrac{1}{x} < 1$, et on peut alors appliquer à $\dfrac{1}{x}$ l'inégalité juste ci-dessus :

$$1 \leqslant \frac{1-\left(\frac{1}{x}\right)^\mu}{\left(1-\frac{1}{x}\right)^\mu} \Longleftrightarrow 1 \leqslant \frac{x^\mu - 1}{(x-1)^\mu}$$

Il n'y a pas de symétrie, mais on trouve une inégalité qui pourrait être intéressante.