Chapitre 11

Étude de la dérivabilité d'une fonction numérique d'une variable réelle

11.1 Introduction

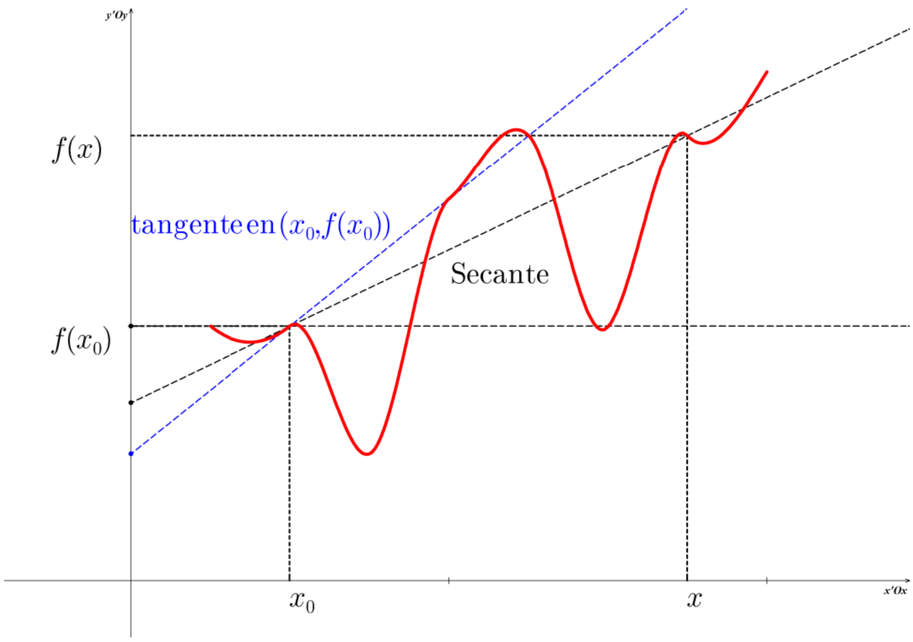

FIGURE 11.1 – Schéma d'introduction

1. **Quelle est l'équation de la sécante qui joint les points** $(x, f(x))$ **et** $(x_0, f(x_0))$ **?**
   - ▷ Elle a une équation du type : $y - f(x_0) = a(t - x_0)$; il faut donc déterminer a
   - ▷ La droite passant par le point $t = x$, nous avons, justement lorsque $t = x$: $f(x) - f(x_0) = a(x - x_0)$, d'où nous tirons :
   $$a = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$
   - ▷ Que désigne le nombre a ?
   C'est,la tangente de l'angle que fait la sécante avec l'axe $x'Ox$

2. **Qu'est ce qui se passe si x se rapproche de x_0 ?**
La sécante, quelque part, devient la tangente....D'où les définitions qui vont suivre

11.2 Premières définitions, premières propriétés

11.2.1 Définition

Soit f une fonction définie sur un domaine $\mathcal{D}_f \subset \mathbb{R}$ et soit $x_0 \in \mathcal{D}_f$
On dit que f est dérivable en x_0, si et seulement si : $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ est finie.
Cette limite finie est alors notée $f'(x_0)$ et est appelé nombre dérivé de f en x_0

Remarque 1 :

En posant $h = x - x_0$, cette définition est équivalente à $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ est finie

11.2.2 Interprétation géométrique de la dérivée

Soit f une fonction définie sur un domaine $\mathcal{D}_f \subset \mathbb{R}$ et soit $x_0 \in \mathcal{D}_f$

1. **Supposons que f admette, en x_0, une dérivée $f'(x_0)$, soit Γ sa représentation graphique**
Alors, Γ admet en $(x_0, f(x_0))$, une tangente dont l'équation est donnée par :

$$y - f(x_0) = f^{'}(x_0)(x - x_0)$$

2. **Réciproquement, soit Γ la représentation graphique de f et M, un point de Γ de coordonnées $(x_0, f(x_0))$**
Supposons que Γ admette en M une tangente non parallèle à $(\mathcal{O}, y)$, alors, f est dérivable en x_0

Exemple 1 :

$f(x) = \sqrt{x}$ définie pour $x \geqslant 0$ n'est pas dérivable en $x = 0$, car le rapport $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ s'exprime par $\dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{0}}{x - 0} = \dfrac{\sqrt{x}}{x}$ dont la limite est infinie lorsque x tend vers 0 par valeurs positives.*(Cf figure 11.2)*

11.2.3 Dérivée à droite, dérivée à gauche

Soit f une fonction définie sur un domaine $\mathcal{D}_f \subset \mathbb{R}$ et soit $x_0 \in \mathcal{D}_f$

1. **Dérivabilité à droite**
On dit que f est dérivable à droite de x_0 si $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existe, et cette limite est notée $f'_d(x_0)$
2. **Dérivabilité à Gauche**
On dit que f est dérivable à gauche de x_0 si $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existe, et cette limite est notée $f'_g(x_0)$
3. **f est dérivable en x_0 si et seulement si**
— **f est dérivable à droite et à gauche de x_0**
— **Et si ces dérivées sont égales**
C'est à dire si : $f^{'}_d(x_0)$ et $f^{'}_g(x_0)$ existent, et si $f^{'}_d(x_0) = f^{'}_g(x_0)$

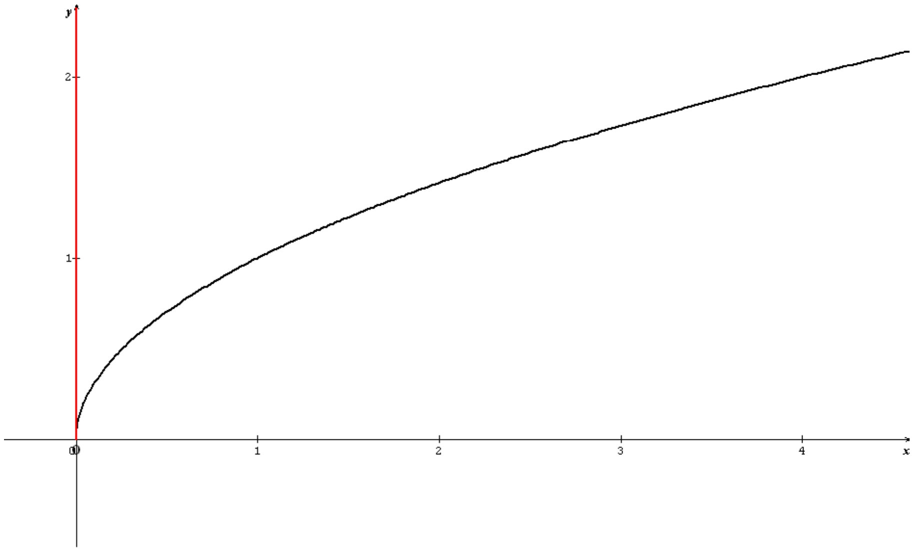

FIGURE 11.2 – La fonction $\sqrt{x}$ et la tangente en $x = 0$ qui est verticale

Remarque 2 :

1. Si f est dérivable à droite de x_0, alors elle admet **une demie tangente à droite de** x_0, d'équation : $y - f(x_0) = f_d^{'}(x_0)(x - x_0)$. Le problème est le même à gauche.
2. Une fonction peut être dérivable à droite et à gauche de x_0, sans pour autant y être dérivable ; Exemple : $f(x) = x^2 + |x|$ qui admet une dérivée à droite et à gauche de 0, sans y être dérivable ; voir le graphe 11.3

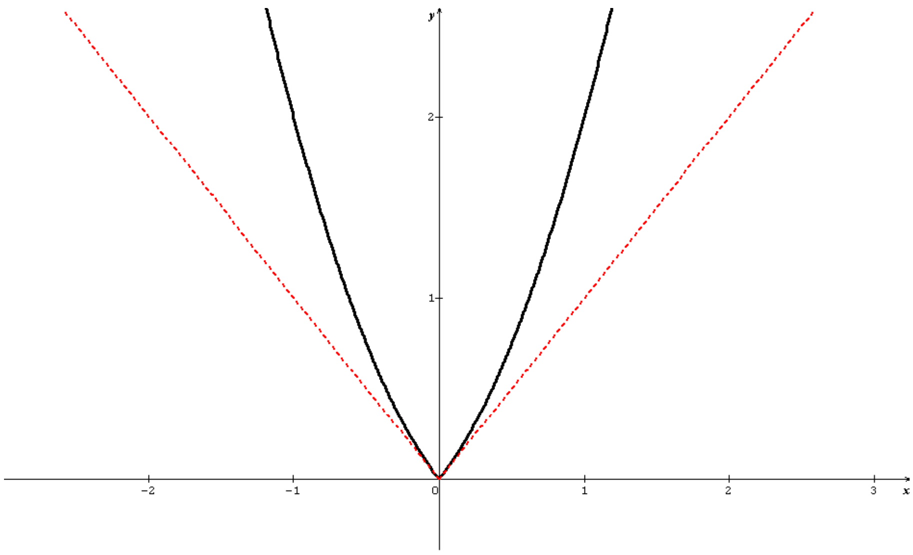

FIGURE 11.3 – La fonction $x^2 + |x|$ admet une dérivée à droite de 0, à gauche de 0, mais n'est pas dérivable en 0

Exemple 2 :

1. Nous allons démontrer que $f(x) = x^2 + |x|$ admet une dérivée à droite de 0.

   Si $x \geqslant 0$, alors $f(x) = x^2 + x$ et : $\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \dfrac{x^2 + x}{x} = x + 1$

Donc , $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} x + 1 = 1$

Ce qui veut dire que f est dérivable à droite de 0 et que $f'_d(0) = 1$

2. Nous allons démontrer, maintenant, que $f(x) = x^2 + |x|$ admet une dérivée à gauche de 0.

   Si $x \leqslant 0$, alors $f(x) = x^2 - x$ et : $\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \dfrac{x^2 - x}{x} = x - 1$

   Donc , $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} x - 1 = -1$

   Ce qui veut dire que f est dérivable à gauche de 0 et que $f'_g(0) = -1$
3. Nous avons f dérivable à droite de 0, dérivable à gauche de 0, mais comme $f'_g(0) \neq f'_d(0)$, f n'est pas dérivable en 0

11.2.4 Théorème

Soit f une fonction définie sur un domaine $\mathcal{D}_f \subset \mathbb{R}$ et soit $x_0 \in \mathcal{D}_f$
On suppose que f est dérivable en x_0. Alors, f est continue en x_0

Démonstration

Par hypothèse, nous avons $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$

Or, nous avons :

$$(f(x) - f(x_0)) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \times (x - x_0)$$

Or, $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \times (x - x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \times \lim\limits_{x \to x_0} (x - x_0) = f'(x_0) \times 0 = 0$

Ainsi, $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) - f(x_0)) = 0$, c'est à dire $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Ce qui montre que f est continue en x_0

Remarque 3 :

La réciproque est fausse ! !

En effet ; il suffit de regarder la fonction $x^2 + |x|$ du graphe 11.3 qui admet une dérivée à droite de 0, à gauche de 0, mais n'est pas dérivable en 0 tout en y étant continue !

Exercice 1 :

1. Soit $f(x) = x^2$. Utiliser la définition formelle de fonction dérivable en $x_0 = 3$ pour montrer que $f'(3) = 6$
2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et g la fonction numérique telle que $g(x) = \lambda$. Utiliser la définition formelle de fonction dérivable en $x_0 \in \mathbb{R}$ pour montrer que, pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$, $g'(x_0) = 0$
3. Soit $f(x) = x$. Utiliser la définition formelle de fonction dérivable en $x_0 \in \mathbb{R}$ pour montrer que, pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$, $f'(x_0) = 1$
4. Soit $f(x) = x^3$. Utiliser la définition formelle de fonction dérivable en x_0 pour montrer que $f'(x_0) = 3x_0^2$
5. Soit $f(x) = |x|$. Utiliser la définition formelle de fonction dérivable pour montrer que f n'est pas dérivable en $x_0 = 0$, bien qu'elle y soit continue.

Exercice 2 :

Soit f définie par :

$$\begin{cases} f : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \quad x & \longmapsto & f(x) = \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } & = 0 \end{cases} \end{cases}$$

Il faut montrer que f est continue en 0, mais n'est pas dérivable en 0

11.2.5 Théorème

Soient f, g et h, 3 fonctions définies sur un même domaine $\mathcal{D}$ et toutes dérivables en $x_0 \in \mathcal{D}$;. Alors :

1. **$f+g$, fg sont dérivables en $x_0 \in \mathcal{D}$. Si $g(x_0) \neq 0$, alors $\dfrac{f}{g}$ est dérivable en x_0**
2. **Nous avons :**
   (a) $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$
   (b) $(f \times g)'(x_0) = f'(x_0) \times g(x_0) + f(x_0) \times g'(x_0)$
   (c) $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x_0) = \dfrac{f'(x_0) \times g(x_0) - f(x_0) \times g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$ **avec, bien entendu** $g(x_0) \neq 0$

Démonstration

1. **Démontrons que $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$**
   En faisant le rapport de dérivation, nous avons :
$$\frac{(f+g)(x) - (f+g)(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x) + g(x) - f(x_0) - g(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$$
   Et donc
$$\lim_{x \to x_0} \frac{(f+g)(x) - (f+g)(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) + g'(x_0)$$
   D'où $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$
2. **Démontrons que $(f \times g)'(x_0) = f'(x_0) \times g(x_0) + g'(x_0) \times f(x_0)$**
   De la même manière :
$$\begin{aligned}\frac{(f \times g)(x) - (f \times g)(x_0)}{x - x_0} &= \frac{f(x) \times g(x) - f(x_0) \times g(x_0)}{x - x_0} \\ &= \frac{f(x) \times g(x) - f(x) \times g(x_0) + f(x) \times g(x_0) - f(x_0) \times g(x_0)}{x - x_0} \\ &= \frac{f(x) \times g(x) - f(x) \times g(x_0)}{x - x_0} + \frac{f(x) \times g(x_0) - f(x_0) \times g(x_0)}{x - x_0} \\ &= f(x) \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} + g(x_0) \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\end{aligned}$$
   Comme $\displaystyle\lim_{x \to x_0} f(x) \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = f(x_0) \times g'(x_0)$ et $\displaystyle\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$
   Nous avons donc $\displaystyle\lim_{x \to x_0} \frac{(f \times g)(x) - (f \times g)(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \times g(x_0) + g'(x_0) \times f(x_0)$
   D'où $(f \times g)'(x_0) = f'(x_0) \times g(x_0) + g'(x_0) \times f(x_0)$
3. **Démontrons que $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x_0) = \dfrac{f'(x_0) \times g(x_0) - f(x_0) \times g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$**
   Tout d'abord, $\dfrac{f}{g}(x) - \dfrac{f}{g}(x_0) = \dfrac{f(x)}{g(x)} - \dfrac{f(x_0)}{g(x_0)} = \dfrac{f(x)\,g(x_0) - f(x_0)\,g(x)}{g(x) \times g(x_0)}$
   Donc :
$$\begin{aligned}\frac{1}{x - x_0}\left(\frac{f}{g}(x) - \frac{f}{g}(x_0)\right) &= \frac{1}{g(x) \times g(x_0)}\left(\frac{f(x)\,g(x_0) - f(x_0)\,g(x)}{x - x_0}\right) \\ &= \frac{1}{g(x) \times g(x_0)}\left(\frac{f(x)\,g(x_0) - f(x_0)\,g(x_0) + f(x_0)\,g(x_0) - f(x_0)\,g(x)}{x - x_0}\right) \\ &= \frac{1}{g(x) \times g(x_0)}\left(g(x_0) \times \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) \times \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}\right)\end{aligned}$$

Comme $\lim_{x\to x_0} \dfrac{1}{g(x)\times g(x_0)} = \dfrac{1}{(g(x_0))^2}$, que $\lim_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$ et $\lim_{x\to x_0} \dfrac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} = g'(x_0)$, nous avons :

$$\lim_{x\to x_0} \frac{1}{x-x_0}\left(\frac{f}{g}(x) - \frac{f}{g}(x_0)\right) = \frac{1}{(g(x_0))^2}\left(f'(x_0)\times g(x_0) - f(x_0)\times g'(x_0)\right)$$

C'est à dire que $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x_0) = \dfrac{f'(x_0)\times g(x_0) - f(x_0)\times g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$

Remarque 4 :

Nous avons, en particuler, $(\lambda f)'(x_0) = \lambda f'(x_0)$; il suffit de considérer la fonction constante $g(x) = \lambda$ et la dérivée du produit.

Exemple 3 :

En utilisant le théorème 11.2.5 :

1. On démontre facilement, et par récurrence, que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la dérivée de la fonction puissance $f(x) = x^n$, est, pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$, $f'(x_0) = nx_0^{n-1}$
2. De même, pour tout $n \in \mathbb{Z}^-$, la dérivée de la fonction puissance $f(x) = x^n$ définie pour $x \in \mathbb{R}^*$, est, pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^*$, $f'(x_0) = nx_0^{n-1}$

11.2.6 Dérivée des fonctions composées

Soit f une fonction numérique d'une variable réelle définie sur $\mathcal{D}_f$ et dérivable en $x_0 \in \mathcal{D}_f$
Soit g une fonction numérique d'une variable réelle définie sur $\mathcal{D}_g$; on suppose $f(\mathcal{D}_f) \subset \mathcal{D}_g$ et g dérivable en $y_0 = f(x_0)$
Alors, $g\circ f$ est dérivable en x_0 et :

$$(g\circ f)'(x_0) = g'\circ f(x_0)\times f'(x_0) = g'(y_0)\times f'(x_0)$$

Démonstration

Nous écrivons tout d'abord les hypothèses

1. f est dérivable en x_0 ; nous pouvons donc écrire :
$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0) + u(x) \iff f(x)-f(x_0) = (x-x_0)\left(f'(x_0)+u(x)\right)$$
Où u est une fonction définie sur $\mathcal{D}_f$ et telle que $\lim_{x\to x_0} u(x) = 0$
2. De même, g est dérivable en y_0 et nous pouvons écrire :
$$\frac{g(y)-g(y_0)}{y-y_0} = g'(y_0) + v(y) \iff g(y)-g(y_0) = (y-y_0)\left(g'(y_0)+v(y)\right)$$
Où v est une fonction définie sur $\mathcal{D}_g$ et telle que $\lim_{y\to y_0} v(y) = 0$

Donc :

$$\begin{aligned} g(f(x)) - g(f(x_0)) = &\ (f(x)-f(x_0))\left(g'(f(x_0)) + v(f(x))\right) \\ = &\ (x-x_0)\left(f'(x_0)+u(x)\right)\left(g'(f(x_0)) + v(f(x))\right) \end{aligned}$$

D'où $\dfrac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x-x_0} = \left(f'(x_0)+u(x)\right)\left(g'(f(x_0)) + v(f(x))\right)$ Nous avons :

- ▷ $\lim_{x\to x_0} f'(x_0) + u(x) = f'(x_0)$

- ▷ f étant dérivable en x_0 est continue en x_0, et donc $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)) = y_0$, d'où $\lim\limits_{x \to x_0} v(f(x)) = 0$, et donc $\lim\limits_{y \to y_0} g'(f(x_0)) + v(f(x)) = g'(f(x_0))$

D'où, nous avons $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = f'(x_0) \times g'(f(x_0))$
Ce que nous voulions