11.3 Fonction dérivée

11.3.1 Définition

Soit f une fonction définie sur un domaine $\mathcal{D}_f \subset \mathbb{R}$ et soit $\mathcal{U} \subset \mathcal{D}_f$

- **On dit que f est dérivable sur $\mathcal{U}$ si et seulement si, pour tout $x \in \mathcal{U}$, $f'(x)$ existe.**
- **L'application**

$$\begin{cases} f' : \mathcal{U} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f'(x) \end{cases}$$

s'appelle fonction dérivée de f ; cette fonction est parfois notée $f' = \dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$

11.3.2 Opération sur les dérivées

1. **Somme de deux fonctions**
   Si f et g sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I, alors $f+g$ est dérivable sur I et
   $$(f+g)' = f' + g'$$
2. **Produit par un scalaire**
   Si f est une fonction dérivable sur intervalle I, alors pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, λf est dérivable sur I et
   $$(\lambda f)' = \lambda f'$$
3. **Produit de deux fonctions**
   Si f et g sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I, alors $f \times g$ est dérivable sur I et
   $$(f \times g)' = g \times f' + g' \times f$$
4. **Quotient de deux fonctions**
   Si f et g sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I et si la fonction g ne s'annule pas sur I, alors $\dfrac{f}{g}$ est dérivable sur I et
   $$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2}$$

Démonstration

C'est une aplication simple du théorème 11.2.5

Remarque 5 :

Le résultat précédent, nous montre que l'opération de dérivation est linéaire :
si D est l'opérateur de dérivation, nous avons :

$$\mathrm{D}(\lambda f + \mu g) = \lambda \mathrm{D}(f) + \mu \mathrm{D}(g)$$

Exemple 4 :

On ne va pas revenir sur les cours de terminale ; par contre, voici quelques exemples courants ; exemples initiés après le théorème 11.2.5

1. La dérivée de la fonction polynôme $P(x) = ax^2 + bx + c$ est donnée par $P'(x) = 2ax + b$
2. La dérivée de $\sin x$ est donnée par $\cos x$
3. La dérivée de $\cos x$ est donnée par $-\sin x$
4. Et, évidemment, pour $x > 0$ la dérivée de $\ln x$ est donnée par $\dfrac{1}{x}$

Remarque 6 :

Quelques conventions :

1. Soit $a < b$; f est dérivable sur l'intervalle $[a, b]$ si et seulement si f est dérivable sur $]a, b[$ et f dérivable à droite de a et à gauche de b.
2. De la même manière on définirait f dérivable sur $]a, b]$ ou $[a; b[$

11.3.3 Fonction dérivée des fonctions composées

Soit f une fonction numérique d'une variable réelle définie sur $\mathcal{D}_f$ et dérivable sur un intervalle $I \subset \mathcal{D}_f$
Soit g une fonction numérique d'une variable réelle définie sur $\mathcal{D}_g$ et dérivable sur un intervalle $J \subset \mathcal{D}_g$ on suppose $f(I) \subset J$
Alors, $g \circ f$ est dérivable sur l'intervalle I et :

$$(g \circ f)' = g' \circ f \times f'$$

Démonstration

C'est une application directe de 11.2.6

Exemple 5 :

Voici des dérivées classiques utilisant les fonctions composées :

1. $(\cos u(x))' = -u'(x) \sin u(x)$
2. $(\sin u(x))' = u'(x) \cos u(x)$
3. $(\ln |u(x)|)' = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$
4. $\left([f(x)]^n\right)' = n f'(x) [f(x)]^{n-1}$ pour $n \in \mathbb{Z}$

Exercice 3 :

1. Calculer la dérivée de $\cos(2x+3)$, $\ln\left(3x^2-5\right)$
2. Pour $a \in \mathbb{R}^{*+} - \{+1\}$, donner la dérivée de $\lg_a(x) = \dfrac{\ln x}{\ln a}$, puis de $\ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$
3. Calculez les dérivées de $\sqrt{x^2-2x-3}$, $\sqrt{2\sin^2 x - 1}$
4. Calculez les dérivées $\left(x + \dfrac{1}{x}\right)^x$ et $\dfrac{2^x-1}{2^x+1}$

Exercice 4 :

Soit Soit f définie par :

$$\begin{cases} f : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \quad x & \longmapsto & f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x} \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } \ = 0 \end{cases} \end{cases}$$

1. Calculer, pour $x \neq 0$, $f'(x)$
2. f est-elle dérivable en 0 ?
3. $f'(x)$ est-elle continue en 0 ?