11.4 Accroissements finis

11.4.1 Définition de maximum local

Soit f définie sur $\mathcal{D}_f \subset \mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On dit que f présente un maximum local en $a \in \mathcal{D}_f$ s'il existe un nombre $\alpha > 0$ tel que, pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, $|x - a| < \alpha \Longrightarrow f(x) \leqslant f(\alpha)$

Remarque 7 :

Bien entendu ; nous définirions de même la notion de minimum local

11.4.2 Théorème

**Soit f une fonction numérique d'une variable réelle définie sur $\mathcal{D}_f$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et soit $[a;b] \subset \mathcal{D}_f$.
On suppose que f est dérivable sur $]a,b[$ et présente un maximum local en $x_0 \in]a,b[$. Alors $f'(x_0) = 0$**

Démonstration

Soit $\alpha > 0$ tel que défini dans la définition 11.4.1 de telle sorte que nous ayions :

$$a < x_0 - \alpha < x_0 < x_0 + \alpha < b$$

- ▷ Pour $x \in]a,b[$ tel que $a < x_0 - \alpha < x < x_0$.
  Alors $x - x_0 < 0$ et $f(x) \leqslant f(x_0)$, et donc $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geqslant 0$.
  f étant dérivable en x_0, $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$ et l'inégalité $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geqslant 0$ montre que $f'(x_0) \geqslant 0$
- ▷ Maintenant, pour $x \in]a,b[$ tel que $x_0 < x < x_0 + \alpha < b$.
  Alors $x - x_0 > 0$ et $f(x) \leqslant f(x_0)$, et donc $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leqslant 0$.
  f étant dérivable en x_0, $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$ et l'inégalité $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leqslant 0$ montre que $f'(x_0) \leqslant 0$

Nous avons donc, en conclusion $f'(x_0) = 0$

Remarque 8 :

Nous avons, bien sûr un résultat analogue pour les minima locaux

11.4.3 Théorème de Rolle

**Soit f une fonction numérique d'une variable réelle définie sur $\mathcal{D}_f$ et soit $[a;b] \subset \mathcal{D}_f$.
On suppose f continue sur $[a;b]$, dérivable sur $]a;b[$ et telle que $f(a) = f(b)$.
Alors, il existe $c \in]a;b[$ tel que $f^{'}(c) = 0$**

Démonstration

1. **Supposons que f soit constante sur $[a;b]$**
   Alors, on a évidemment $f(a) = f(b)$, mais, pour tout $x \in]a;b[$, nous avons $f^{'}(x) = 0$ et le théorème est vérifié.
2. **Supposons f non constante sur $[a;b]$.**
   Supposons, de plus, que f admette des valeurs supérieures à $f(a)$ *(f étant non constante, ceci est possible ; on aurait pu tout aussi bien supposer l'existence de valeurs inférieures à $f(a)$)* et soit $M = \sup\limits_{x \in [a;b]} f(x)$

- ▷ f étant continue sur l'intervalle $[a;b]$, d'après le théorème des compact, M existe, et , de plus, $M > f(a)$ et, il existe $c \in]a;b[$ tel que $M = f(c)$
- ▷ Et donc, d'après le théorème 11.4.2, $f'(c) = 0$

Ce que nous voulions

Remarque 9 :

1. Vous trouvez une illustration du théorème de Rolle, dans la figure 11.4
2. La dérivabilité en a ou b n'est pas nécessaire
3. La continuité de f sur $[a;b]$ est nécessaire
4. la démonstration aurait été semblable si nous avions choisi $m = \inf_{x\in[a;b]} f(x) = f(c)$
5. Les conditions du théorème de Rolle sont suffisantes, elles ne sont pas pour cela nécessaires.

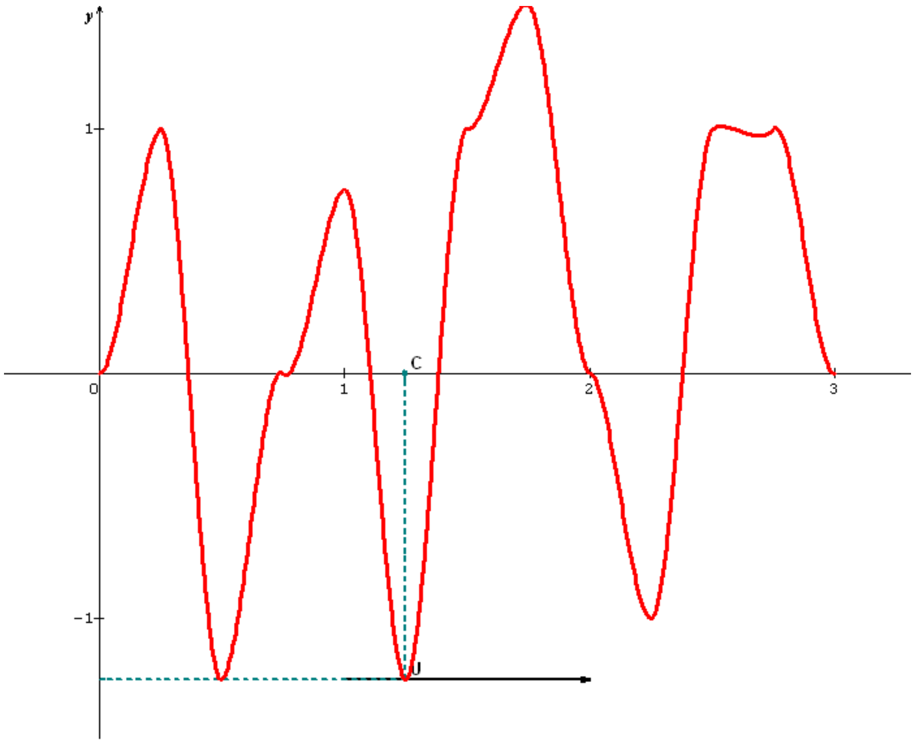

FIGURE 11.4 – Illustration du théorème de Rolle où, ici, $f(0) = f(2) = 0$

11.4.4 Accroissements finis généralisés

Soient f et g 2 fonctions numériquse d'une variable réelle définies respectivement sur $\mathcal{D}_f$ et sur $\mathcal{D}_g$.
Soit $[a;b] \subset \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g$.
On suppose f et g continues sur $[a;b]$ et dérivables sur $]a;b[$.
Alors, il existe $c \in]a;b[$ tel que

$$(f(a) - f(b))\, g'(c) = (g(a) - g(b))\, f'(c)$$

Démonstration

On construit la fonction auxiliaire h définie sur $[a;b]$, pour tout $x \in [a;b]$ par :

$$h(x) = (f(a) - f(b))\, g(x) - (g(a) - g(b))\, f(x)$$

Alors :
- ▷ h est continue sur $[a;b]$ et dérivable sur $]a;b[$
- ▷ $h(a) = (f(a) - f(b))\, g(a) - (g(a) - g(b))\, f(a) = -f(b)\, g(a) + g(b)\, f(a)$
- ▷ $h(b) = (f(a) - f(b))\, g(b) - (g(a) - g(b))\, f(b) = g(b)\, f(a) - f(b)\, g(a)$
- ▷ Nous avons donc $h(a) = h(b)$

D'après le théorème de Rolle 11.4.3, il existe $c \in]a;b[$ tel que $h'(c) = 0$. Or,

$$h'(x) = (f(a) - f(b))\, g'(x) - (g(a) - g(b))\, f'(x)$$

Il existe donc $c \in]a;b[$ tel que

$$(f(a) - f(b))\, g'(c) - (g(a) - g(b))\, f'(c) = 0 \iff (f(a) - f(b))\, g'(c) = (g(a) - g(b))\, f'(c)$$

Ce que nous voulions

11.4.5 Théorème des accroissements finis

Soit f une fonction numérique d'une variable réelle définie sur $\mathcal{D}_f$ et soit $[a;b] \subset \mathcal{D}_f$. On suppose f continue sur $[a;b]$, dérivable sur $]a;b[$.
Alors, il existe $c \in]a;b[$ tel que

$$f'(c) = \frac{f(a) - f(b)}{a - b}$$

Démonstration

Ce théorème est une conséquence de 11.4.4
Soit la fonction g définie sur $[a;b]$ pour tout $x \in [a;b]$ par $g(x) = x$.
Alors, clairement, g est continue sur $[a;b]$, dérivable sur $[a;b]$ avec, en particulier $g'(x) = 1$. Alors, d'après 11.4.4, il existe $c \in]a;b[$ tel que

$$(f(a) - f(b))\, g'(c) = (g(a) - g(b))\, f'(c) \iff (f(a) - f(b)) = (a - b)\, f'(c) \iff f'(c) = \frac{f(a) - f(b)}{a - b}$$

Remarque 10 :

Interprétation graphique

Ceci veut dire qu'il existe une tangente à la courbe représentative qui est parallèle à la sécante à la courbe passant par $A(a, f(a))$ et $B(bf(b))$

Exercice 5 :

Une autre démonstration de 11.4.5
Soit f une fonction numérique d'une variable réelle définie sur $\mathcal{D}_f$ et soit $[a;b] \subset \mathcal{D}_f$. On suppose f continue sur $[a;b]$, dérivable sur $]a;b[$
Pour $x \in [a;b]$, on note

$$\phi(x) = (x - a)(f(b) - f(a)) - (f(x) - f(a))(b - a)$$

En appliquant à ϕ le théorème de Rolle, retrouver le théorème des accroissements finis 11.4.5

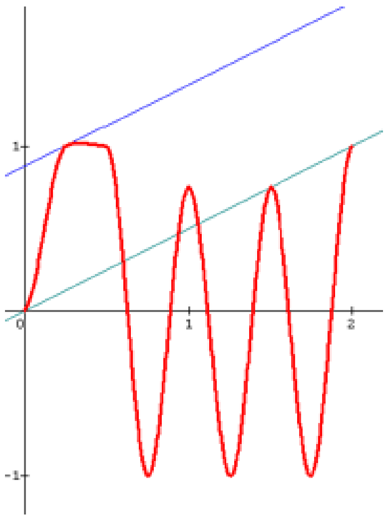

FIGURE 11.5 – Illustration du théorème des accroissements finis

Exemple 6 :

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui à x fait correspondre $f(x) = x^2$.
f étant continue et dérivable, on peut lui appliquer le théorème des accroissements finis pour deux réels quelconques a et b avec $a < b$:
il existe $c \in]a; b[$ tel que $f(b) - f(a) = (b - a) f'(c)$; on peut, dans ce cas particulier, calculer c. Donc,

$$f(b) - f(a) = (b - a) f'(c) \Leftrightarrow b^2 - a^2 = 2c(b - a) \Leftrightarrow c = \frac{a + b}{2}$$

On retrouve ainsi une propriété géométrique de la parabole :
Si A et B sont deux points d'une parabole Γ d'abscisses resprctives a et b, la tangente à Γ au point C d'abscisse $c = \dfrac{a + b}{2}$ est parallèle à la sécante. Voir la figure 11.6 (AB)

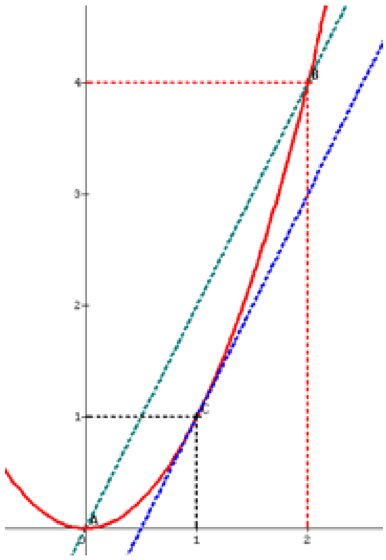

FIGURE 11.6 – Illustration de la question des paraboles

11.4.6 Conséquence : inégalité des accroissements finis

Soit f une fonction numérique d'une variable réelle définie sur $\mathcal{D}_f$ et soit $[a;b] \subset \mathcal{D}_f$.
On suppose f continue sur $[a;b]$, dérivable sur $]a;b[$ et que,il existe m et M tels que pour tout $x \in]a;b[$, nous ayions l'inégalité $m \leqslant f^{'}(x) \leqslant M$, alors,

$$m \leqslant \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leqslant M$$

Démonstration

Elle est simple et nous allons la faire.
En utilisant le théorème des accroissements finis, nous pouvons dire qu'il existe $c \in]a;b[$ tel que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Comme, pour tout $x \in]a;b[$, nous avons l'inégalité $m \leqslant f'(x) \leqslant M$, nous avons, en particulier $m \leq f'(c) \leq M$, c'est à dire

$$m \leqslant \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leqslant M$$

Ce que nous voulions.

Remarque 11 :

Important :
Ce résultat est, le plus souvent utilisé sous une autre forme, en majorant la valeur absolue de la dérivée sur l'intervalle $]a;b[$:
Si il existe $M > 0$ tel que pour tout $x \in]a;b[$, $\left|f^{'}(x)\right| \leqslant M$, alors,

$$\left|\frac{f(b) - f(a)}{b - a}\right| \leqslant M$$

C'est à dire : $\left|f^{'}(x)\right| \leqslant M \Longrightarrow |f(b) - f(a)| \leqslant M\,|b - a|$

On en conclue que si f a une dérivée bornée sur $]a;b[$ alors, f est lipschitzienne sur $]a;b[$. On retrouve ce questionnement pour les résolutions d'équations.

Exemple 7 :

Dans les quelques exemples qui suivent, nous allons utiliser l'inégalité des accroissements finis démontrée en 11.4.6

1. **Quel est l'erreur commise en remplaçant $\sqrt{10002}$ par $\sqrt{10000} = 100$?**

   On considère la fonction $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ définie par $f(x) = \sqrt{x}$ dont la dérivée est : $f^{'}(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.
   En appliquant l'inégalité des accroissements finis sur l'intervalle $[10000; 100002]$, dans lequel nous avons $\left|f^{'}(x)\right| \leqslant \dfrac{1}{2\sqrt{10000}} = \dfrac{1}{200}$.
   L'erreur sera donc $\left|\sqrt{10002} - 100\right| \leqslant 2 \times \dfrac{1}{200} = 10^{-1}$
2. **Utilisation de l'inégalité des accroissements finis pour démontrer que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ où $S_n \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ est divergente et tend vers $+\infty$**

On considère la fonction $\ln : \mathbb{R}^{\star +} \longrightarrow \mathbb{R}$ et on applique l'inégalité des accroissements finis entre $[n; n+1]$.

Nous avons donc $\dfrac{1}{n+1} \leqslant \dfrac{\ln(n+1) - \ln n}{(n+1) - n} \leqslant \dfrac{1}{n}$, c'est à dire, $\dfrac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) - \ln n \leq \dfrac{1}{n}$

En sommant de 1 à n, nous avons :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \ln(k+1) - \ln k \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

C'est à dire, après calcul, $\ln(n+1) \leqslant \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$; comme $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \ln(n+1) = +\infty$, on démontre que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = +\infty$, c'est à dire que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ où $S_n \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ est divergente et tend vers $+\infty$.

11.4.7 Conséquences sur l'étude des variations d'une fonction

Soit f une fonction numérique d'une variable réelle définie sur $\mathcal{D}_f$ et soit $I \subset \mathcal{D}_f$. On suppose f dérivable sur I

1. **f est constante sur I <u>si et seulement si</u> f' est nulle sur I**
2. **f est croissante sur I <u>si et seulement si</u> f' est positive sur I**
3. **f est décroissante sur I <u>si et seulement si</u> f' est négative sur I**

<u>Démonstration</u>

1. **On démontre dans le sens direct**
   — Si f est constante sur I, alors le rapport $\dfrac{f(x) - f(y)}{x - y} = 0$ pour tout $x \neq y$ de I, donc $f'(x) = 0$ pour tout $x \in I$
   — De même, pour $x \leq y$, en supposant f est croissante, le rapport $\tau(x, y) = \dfrac{f(x) - f(y)}{x - y}$, qui représente le taux de variation de f est positif ; le rapport ne change pas de signe si $y \leq x$; en conséquence $\displaystyle\lim_{x\to y} \tau(x, y) = f'(y)$ est positif
   — La démonstration est la même si la fonction f est décroissante.
2. **Le théorème des accroissements finis permet de démontrer la réciproque.**
   En effet, soient $x \in I$ et $y \in I$ tels que $x < y$
   f est dérivable et continue sur I qui contient l'intervalle $[x; y]$, et donc f est continue et dérivable sur l'intervalle plus petit $[x; y]$ et il existe $c \in [x; y]$ tel que $\tau(x, y) = \dfrac{f(x) - f(y)}{x - y} = f'(c)$
   — Supposons f' nulle sur I, alors $\tau(x, y) = 0$ et donc $f(x) = f(y)$ pour tout $x \in I$ et $y \in I$; f est donc constante sur I
   — Supposons f' positive sur I, alors $\tau(x, y) \geq 0$ et donc $f(x) \leq f(y)$ pour tout $x \in I$ et $y \in I$ tels que $x \leq y$; f est donc croissante sur I
   — La démonstration est tout à fait semblable si f' est négative.