11.5 Premiers exercices

11.5.1 Questions élémentaires

Exercice 6 :

1. Soit $A(r)$ l'aire d'un cercle de rayon r. Montrer que $A'(r)$ en est la circonférence
2. On considère, dans $\mathbb{R}^2$, l'ensemble $\Delta = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que} x + y = 1\right\}$ *(c'est une droite !!)*. Minimiser, sur Δ l'expression $x^2 + y^2$

Exercice 7 :

Soit $\left\{\begin{array}{ccc} f : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \left\{\begin{array}{l} 4x^2 - 6 \text{ si } x \in \left]-\infty; -1\right[\\ x^3 + x \text{ si } x \in [-1; 1] \\ -x^2 + 6x - 3 \text{ si } x \in \left]1; +\infty\right[\end{array}\right. \end{array}\right.$

1. Représenter $\mathcal{C}_f$, courbe représentative f sur $[-2; 2]$.
2. Etudier la continuité de f sur $\mathbb{R}$, on regardera en particulier les points -1 et 1.
3. Etudier la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}$.
4. Calculer et placer la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1.

11.5.2 Savoir calculer des dérivées

L'objet des exercices qui suivent est de pratiquer, et faire pratiquer le calcul des dérivées

Exercice 8 :

Calculer les dérivée premières des fonctions suivantes :

1. $f_1(x) = \left(1 - x^2\right)^2$
2. $f_2(x) = \dfrac{1}{\left(1 - x^3\right)^2}$
3. $f_3(x) = x \sin \dfrac{1}{x}$ pour $x \neq 0$
4. $f_4(x) = \dfrac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$
5. $f_5(x) = \sin x + \dfrac{1}{\cos x}$
6. $f_6(x) = \tan\left(\dfrac{1 - x}{1 + x}\right)$
7. $f_7(x) = \sqrt{1 + \sin^2 x}$
8. $f_8(x) = \sqrt{\dfrac{1}{\sin x}}$ pour $x \in \left]0, \pi\right[$
9. $f_9(x) = \sqrt{\dfrac{1 - \tan x}{1 + \tan x}}$
10. $f_{10}(x) = \ln\left(x^2 + 1\right)$
11. $f_{11}(x) = e^{1 + \frac{1}{x}}$
12. $f_{12}(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$

Exercice 9 :

Soit $g(x) = \dfrac{ax + b}{cx + d}$. Démontrer que $g'(x) = \dfrac{ad - bc}{(cx + d)^2} = \dfrac{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}{(cx + d)^2}$

Exercice 10 :

La dérivée logarithmique
Soit f une fonction dérivable en x_0 ; on appelle dérivée logarithmique en x_0, le nombre $L(f)(x_0) = \dfrac{f'(x_0)}{f(x_0)}$ *(On suppose, bien entendu, $f(x_0) \neq 0$)*

1. Calculez $L(fg)$, $L\left(\dfrac{f}{g}\right)$, $L(\lambda f)$, $L(f^n)$, et plus généralement, $L\left(\dfrac{f_1 \times \cdots \times f_p}{g_1 \times \cdots \times g_m}\right)$
2. Applications
   En utilisant les dérivées logarithmiques, calculer $f'(x)$ dans les cas suivants :

(a) $\dfrac{(x-1)^2(x+1)^3}{(x^2-x+1)^3}$ (b) $\dfrac{(x-3)^2(x+5)^4}{(x^2+x+1)^5}$

Exercice 11 :

On pose $\left\{\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sin^3(x) \end{array}\right.$ et $\left\{\begin{array}{rcl} g:\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sin\left(\dfrac{x}{1+x^2}\right) \end{array}\right.$

1. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer f'.
2. Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer g'.

Exercice 12 :

Soient a, b, c et d, 4 fonctions dérivables sur même domaine $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}$.
Nous considérons $F(x) = \begin{vmatrix} a(x) & b(x) \\ c(x) & d(x) \end{vmatrix}$
Démontrez que F est dérivable et que

$$F'(x) = \begin{vmatrix} a'(x) & b'(x) \\ c(x) & d(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a(x) & b(x) \\ c'(x) & d'(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a'(x) & b(x) \\ c'(x) & d(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a(x) & b'(x) \\ c(x) & d'(x) \end{vmatrix}$$

11.5.3 Exercices sur la notion de dérivée

Exercice 13 :

La fonction $f(x) = 2x + 1 + \dfrac{x^3 \sin x^2 + x^2}{2+\sqrt{|x|}}$ est-elle dérivable en 0 ? Si oui, quelle est sa dérivée ?

Exercice 14 :

Dérivabilité à droite et à gauche

1. Etudiez la dérivabilité à droite et à gauche, en $x = 1$ et en $x = -1$ de la fonction $f(x) = \left|x^2 - 1\right|$
2. La fonction $f(x) = x\sqrt{x}$ est-elle dérivable à droite de 0 ?

Exercice 15 :

On pose $f(x) = (x+1)\sqrt{|x^2-1|}$.

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Etudier la dérivabilité de f et calculer f'.

11.5.4 Accroissements finis

Exercice 16 :

Soient $C_0, C_1, \ldots, C_n$ des constantes telles que

$$C_0 + \frac{C_1}{2} + \frac{C_2}{3} + \ldots + \frac{C_{n-1}}{n} + \frac{C_n}{n+1} = 0$$

Montrer que l'équation

$$C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \ldots + C_{n-1}x^{n-1} + C_n x^n = 0$$

a au moins une racine réelle comprise entre 0 et 1

Exercice 17 :

En utilisant le théorème des accroissements finis trouver un encadrement des valeurs : $\sqrt{500} - \sqrt{499}$ puis de $\ln(1001) - \ln(1000)$.

Exercice 18 :

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{\sin x + \cos x}{1 + \cos^2 x}$$

Montrer que, pour tout $a \in \mathbb{R}$, f' s'annule au moins une fois sur l'intervalle $[a; a + 2\pi]$

Exercice 19 :

Soit $f : [a; b] \longrightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction continue sur $[a; b]$ et dérivable sur $]a; b[$. En utilisant la fonction $g = \ln f$, démontrer qu'il existe $c \in]a; b[$ tel que :

$$\frac{f(a)}{f(b)} = \exp\left(\frac{f'(c)}{f(c)}(b - a)\right)$$