11.6 Dérivée d'ordre supérieur

11.6.1 Définition

1. **On appelle $f^{(0)}$ la dérivée d'ordre 0 de f, c'est à dire $f^{(0)} = f$**
2. **Si $n \geqslant 1$, la dérivée n-ième de f est définie par récurrence, par :**

$$f^{(n)} = \left(f^{(n-1)}\right)'$$

3. **On note aussi, parfois, $f^{(n)}(x) = \dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(f(x))$**

Exemple 8 :

1. Calcul des dérivées successives, jusqu'à l'ordre 5, de $f(x) = -7x^2 + 8x + 2$

   Bien entendu, comme c'est un polynôme, c'est très simple :

   Dérivée première $f'(x) = -14x + 8$

   Dérivée seconde $f^{(2)}(x) = -14$

   Dérivée troisième $f^{(3)}(x) = 0$

   Et, bien entendu, pour $k \geqslant 4, f^{(k)}(x) = 0$
2. Examiner les dérivées successives de $\sin x$

   Dérivée première $f'(x) = \cos x = \sin\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$

   Dérivée seconde $f^{(2)}(x) = -\sin x = \sin(x + \pi) = \sin\left(x + 2\dfrac{\pi}{2}\right)$

   Dérivée troisième $f^{(3)}(x) = -\cos x = \sin\left(x + 3\dfrac{\pi}{2}\right)$

   Et, ceci se démontre très facilement par récurrence sur k, pour $k \in \mathbb{N}$

$$\boxed{\sin^{(k)}(x) = \sin\left(x + k\frac{\pi}{2}\right)}$$

3. De la même manière, les dérivées successives de $\cos x$ sont données, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\boxed{\cos^{(k)}(x) = \cos\left(x + k\frac{\pi}{2}\right)}$$

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n(x) = (x-a)^n$, quelles sont les dérivées successives de f_n ?

   Dérivée première $f_n'(x) = n(x-a)^{n-1} = \dfrac{n!}{(n-1)!}(x-a)^{n-1}$

   Dérivée seconde $f_n^{(2)}(x) = n(n-1)(x-a)^{n-2} = \dfrac{n!}{(n-2)!}(x-a)^{n-2}$

   Dérivée troisième $f_n^{(3)}(x) = n(n-1)(n-2)(x-a)^{n-3} = \dfrac{n!}{(n-3)!}(x-a)^{n-3}$

   Rappelons que le nombre d'arrangements de k éléments pris parmi n est donné par : $\mathrm{A}_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$.

   Nous pouvons donc démontrer très facilement par récurrence sur k, pour $k \in \mathbb{N}$,

$$\boxed{f_n^{(k)}(x) = \mathrm{A}_n^k (x-a)^{n-k}}$$

   On montre, en particulier, que si $k > n$, $f_n^{(k)}(x) = 0$

11.6.2 Fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ et de classe $\mathcal{C}^\infty$

Soit f une fonction définie sur un domaine $\mathcal{D}_f \subset \mathbb{R}$ et soit $\mathcal{U} \subset \mathcal{D}_f$

1. **f est continuement dérivable sur $\mathcal{U}$ si f est dérivable sur $\mathcal{U}$ et si f' est continue sur $\mathcal{U}$**
2. **Fonctions de classe $\mathcal{C}^n$**
   On dit que f est une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathcal{U}$ si et seulement si $f^{(n)}$ est définie (i.e. f est n fois dérivable)et la fonction $f^{(n)}$ est continue sur $\mathcal{U}$
3. **Fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$**
   On dit que f est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathcal{U}$ si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}$ est définie (i.e. f est n fois dérivable) et la fonction $f^{(n)}$ est continue sur $\mathcal{U}$

Remarque 12 :

1. On dit souvent que f est de classe $\mathcal{C}^0$ si f est simplement continue
2. Si f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathcal{U}$, alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$ avec $0 \leqslant k \leqslant n$, f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $\mathcal{U}$

Exemple 9 :

1. Si f est le rapport de 2 polynômes, définis sur I, alors, f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I
2. Pour $n \in \mathbb{N}^\star$ et $f(x) = \dfrac{1}{(x-a)^n}$, alors, f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R} - \{a\}$, et pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\boxed{f^{(k)}(x) = (-1)^k \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!} \times \frac{1}{(x-a)^{n+k}}}$$

Exercice 20 :

1. Calculez les dérivées *n-ièmes* de x^α où $\alpha \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}^{\star+}$
2. Calculez les dérivées *n-ièmes* de a^x où $x \in \mathbb{R}$ et $a > 0$
3. Rechercher les dérivées *n-ièmes* de $\log_a(x)$