11.8 Seconde liste d'exercices

11.8.1 Indéterminations et rapport de dérivation

Exercice 22 :

L'objet de cet exercice est d'utiliser le rapport de dérivation pour lever des indéterminations ; c'est aussi l'outil utilisé pour donner les limites remarquables.

1. $\lim_{x \to e} \dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{e}}{\ln x - 1}$
2. $\lim_{x \to 0} \dfrac{a^x - b^x}{c^x - d^x}$ avec $c \neq d$
3. $\lim_{x \to 0} \dfrac{(1+x)^n - 1}{kx}$ où $k \neq 0$

11.8.2 Dérivées successives

Exercice 23 :

On pose $f(x) = xe^x$

1. Calculer $f'(x)$; $f''(x)$; $f^{(3)}(x)$ et $f^{(4)}(x)$.
2. Conjecturer l'expression de $f^{(n)}(x)$.
3. Etablir à l'aide d'un raisonnement par récurrence le résultat de la question précédente.

Exercice 24 :

On pose $f(x) = x \sin(x)$

1. Calculer $f'(x) =$; $f''(x)$; $f^{(3)}(x)$ et $f^{(4)}(x)$.
2. Conjecturer l'expression de $f^{(n)}(x)$.
3. Etablir à l'aide d'un raisonnement par récurrence le résultat de la question précédente.

11.8.3 Exercices de prolongement

Exercice 25 :

Soit $\mathcal{P}$ le plan euclidien muni d'un repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$ orthonormé. Pour un point A et une droite $\mathcal{D}$ donnés du plan, on définit la distance de A à $\mathcal{D}$ par $d(A; \mathcal{D}) = \inf_{M \in \mathcal{D}} AM$.

1. On pose $A(1, 2)$ et $\mathcal{D} : y = 2x + 3$. Calculer $d(A; \mathcal{D})$.
2. On pose $A(x_0; y_0)$ et $\mathcal{D} : y = ax + b$. Calculer $d(A; \mathcal{D})$

Exercice 26 :

Soit $n \in \mathbb{N}$, on pose : $\left\{ \begin{array}{rcl} f_n : [0;1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f_n(x) = e^{-x}\left(1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!}\right) \end{array} \right.$

1. Calculer $f_n'(x)$, puis trouver un encadrement de f_n' sur $[0; 1]$.
2. Montrer que $-\dfrac{1}{(n+1)!} \leqslant e^{-1}\left(1 + 1 + \dfrac{1}{2!} + \dfrac{1}{3!} + \cdots + \dfrac{1}{n!}\right) - 1 \leqslant 0$.
3. Calculer $\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \dfrac{1}{k!}$.

Exercice 27 :

Dérivée centrale

Soit $a \in \mathbb{R}$ et f une fonction numérique définie sur un intervalle de la forme $I =]a - \varepsilon; a + \varepsilon]$, où $\varepsilon > 0$. On appelle dérivée centrale de f en a, le nombre $f_c(a) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \dfrac{f(a+h) - f(a-h)}{2h}$ si cette limite existe.

1. Montrer que si f est dérivable en a, alors elle admet une dérivée centrale en a

2. N'est-il pas possible de donner une condition plus faible ?
3. Avons-nous la réciproque ? (c'est à dire que si f admet une dérivée centrale en a, est-elle dérivable en a ? Etudier, par exemple, $|x|$ au voisinage de 0

Exercice 28 :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sqrt{\cos x} + \sqrt{\sin x} = 1$

Exercice 29 :

1. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\sqrt{2} \leqslant \cos x + \sin x \leqslant \sqrt{2} \text{ et } -\sqrt{2} \leqslant -\cos x + \sin x \leqslant \sqrt{2}$$

2. Pour $t \in \mathbb{R}$, on considère la fonction $f_t(x) = \cos tx + \sin tx$; montrer que si $|t| < \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, alors l'équation $f_t(x) = x$ admet une unique solution

Exercice 30 :

Soit $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $\mu \geqslant 1$

1. En étudiant les variations de la fonction $\varphi(x) = \dfrac{1 + x^\mu}{(1 + x)^\mu}$ définie pour $x \in [0; 1]$, démontrer que, pour tout $x \in [0; 1]$

$$2^{1-\mu} \leqslant \frac{1 + x^\mu}{(1 + x)^\mu} \leqslant 1$$

2. De même, montrer que, pour tout $x \in [0; 1[$

$$\frac{1 - x^\mu}{(1 - x)^\mu} \geqslant 1$$