Annexe B

La fonction logarithme

Il y a plusieurs façons de définir la fonction logarithme, tout comme il y a plusieurs façons de définir la fonction exponentielle
On présente souvent la fonction logarithme comme solution de l'équation fonctionnelle :

$$\left(\forall x \in \mathbb{R}^{*+}\right)\left(\forall y \in \mathbb{R}^{*+}\right)(f(xy) = f(x) + f(y))$$

Dans cet exposé, nous faisons le choix de définir la fonction logarithme à partir des intégrales

B.1 Premières définitions, premières propriétés

B.1.1 Définition

On appelle fonction logarithme népérien la primitive de la fonction $f(x) = \dfrac{1}{x}$ définie sur $]0;+\infty[$ et qui s'annule en $x = 1$.
Nous notons donc : $\ln x = \displaystyle\int_1^x \frac{dt}{t}$

Remarque 1 :

De la définition B.1.1, il résulte immédiatement :

1. La fonction ln est définie sur $]0;+\infty[$
2. $\ln 1 = 0$
3. Sur l'intervalle $]0;+\infty[$, nous avons la dérivée de $\ln x$ $(\ln x) = \dfrac{1}{x}$
4. Sur l'intervalle $]0;+\infty[$, sa dfonction dérivée étant positive, la fonction ln est continue et croissante. Ainsi, pour tout $a > 0$ et tout $b > 0$:
   (a) Si $a > b$, alors $\ln a > \ln b$
   (b) Si $a > 1$, alors $\ln a > 0$
   (c) Si $a < 1$, alors $\ln a < 0$

Exercice 1 :

Donner le domaine de définition des fonctions suivantes !

1. $f_1(x) = \ln\left(x^2 + 1\right)$
2. $f_2(x) = \ln(2x - 1)$
3. $f_3(x) = \ln(3 - 2x)$
4. $f_4(x) = \ln|x - 1|$
5. $f_5(x) = \ln\left(x^2 - 5x + 6\right)$
6. $f_6(x) = \ln(\ln x)$

Exercice 2 :

Démontrer que pour tout $x > 0$ et tout $y > 0$, nous avons $(x + y)\ln(x + y) \geqslant x\ln x + y\ln y$

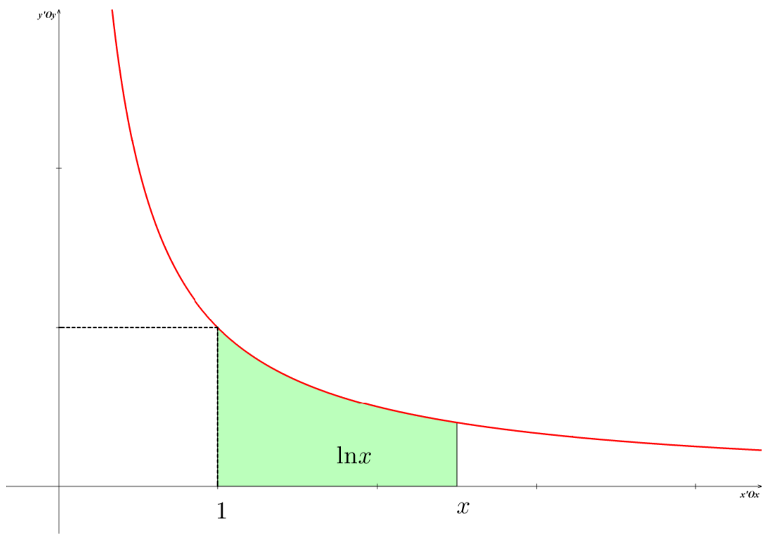

FIGURE B.1 – Visualisation de la définition du logarithme népérien

B.1.2 Propriété fondamentale

1. **Pour tout réels $a > 0$ et $b > 0$, nous avons :** $\ln ab = \ln a + \ln b$
2. **La fonction logarithme $\ln$ est un homomorphisme du groupe abélien multiplicatif $(\mathbb{R}^{*+}, \times)$ vers le groupe abélien additif $(\mathbb{R}, +)$**

Démonstration

- ▷ Soit $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}$ et $u : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}^{*+}$ une fonction dérivable. Comme pour tout $x \in \mathcal{D}$, nous avons $u(x) > 0$, nous pouvons définir une fonction $g : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ par $g(x) = \ln u(x)$

  g est dérivable comme composée de fonctions dérivables et $g'(x) = \ln' u(x) \times u'(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$
- ▷ Soient $y > 0$ et $x > 0$ et considérons la fonction $u(x) = xy$; c'est une application linéaire telle que $u'(x) = y$

  Alors la fonction $g(x) = \ln u(x) = \ln xy$ a pour dérivée $g'(x) = \ln' u(x) \times u'(x) = \dfrac{y}{xy} = \dfrac{1}{x}$
- ▷ Ainsi, g apparaît comme une primitive de la fonction $\dfrac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}^{*+}$ et donc $g(x) = \ln x + k$ où $k \in \mathbb{R}$

  Il est possible de connaître k.

  En effet, pour $x = 1$, nous avons $g(1) = \ln 1 + k = k$, c'est à dire, comme $g(1) = \ln y$, nous avons $k = \ln y$ et donc, comme annoncé $\ln xy = \ln x + \ln y$; c'est la propriété fondamentale du logarithme

Exercice 3 :

Pour quels $x \in \mathbb{R}$ avons nous l'égalité $\ln[(2-x)(x+3)] = \ln(2-x) + \ln(x+3)$?

B.1.3 Conséquences 1

1. **Pour tout $a > 0$ et tout $b > 0$, nous avons :**

(a) $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a$ **(b)** $\ln\left(\frac{b}{a}\right) = \ln b - \ln a$

2. **Pour tout** $a > 0$ **et tout** $n \in \mathbb{Z}$**,** $\ln a^n = n \ln a$

Démonstration

Ce résultat est la conséquence directe des homomorphismes de groupes ; donc, rien de nouveau sous le soleil ! Nous allons pourtant le redémontrer.

1. Soit $a > 0$; alors, $\ln 1 = \ln\left(a \times \frac{1}{a}\right) \overset{\text{Propriété Fondamentale}}{=} \ln a + \ln\left(\frac{1}{a}\right)$ et donc $0 = \ln a + \ln\left(\frac{1}{a}\right)$, c'est à dire $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a$
2. Soient $a > 0$ et $b > 0$; alors $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln\left(a \times \frac{1}{b}\right) = \ln a + \ln\left(\frac{1}{b}\right) = \ln a - \ln b$
3. Soit $a > 0$ et $n \in \mathbb{Z}$
   - ▷ Nous allons montrer, par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\ln a^n = n \ln a$

     C'est vrai pour $n = 0$ En effet, $\ln a^0 = \ln 1 = 0 = 0 \ln a$

     Supposons que pour $n \in \mathbb{N}$**, nous avons** $\ln a^n = n \ln a$

     Démontrons la propriété à l'ordre $n+1$ $\ln a^{n+1} = \ln(a^n \times a) = \ln a^n + \ln a = n \ln a + \ln a = (n+1) \ln a$
   - ▷ Soit $n \in \mathbb{Z}$ et $n \leqslant -1$

     Alors, $a^n = a^{-n_1}$ où $n_1 = -n$ et $n_1 \in \mathbb{N}$.

     Nous avons aussi $a^n = a^{-n_1} = \frac{1}{a^{n_1}} = \left(\frac{1}{a}\right)^{n_1}$ de telle sorte que :

$$\ln a^n = \ln\left(\frac{1}{a}\right)^{n_1} = n_1 \ln\left(\frac{1}{a}\right) = -n_1 \ln a = n \ln a$$

   Ainsi, pour tout $a > 0$ et tout $n \in \mathbb{Z}$, $\ln a^n = n \ln a$

Remarque 2 :

Nous avons, bien entendu, pour $a_1 > 0, a_2 > 0, \cdots, a_n > 0$:

$$\ln(a_1 a_2 \cdots, a_n) = \ln a_1 + \ln a_2 + \cdots + \ln a_n \iff \ln\left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \ln a_k$$

B.1.4 Conséquences 2

Pour tout $a > 0$ **et tout** $r \in \mathbb{Q}$**, nous avons :** $\ln a^r = r \ln a$

Démonstration

Soit $a > 0$

Nous allons faire cette démonstration en 2 temps

1. Soit $q \in \mathbb{N}^*$. Alors $a = \left(a^{\frac{1}{q}}\right)^q$ et donc $\ln a = \ln\left(a^{\frac{1}{q}}\right)^q = q \ln\left(a^{\frac{1}{q}}\right)$

   Nous avons donc $\ln a = q \ln\left(a^{\frac{1}{q}}\right) \iff \frac{1}{q} \ln a = \ln\left(a^{\frac{1}{q}}\right)$
2. Soit $r \in \mathbb{Q}$; alors, $r = \frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$

   Alors $a^r = a^{\frac{p}{q}} = \left(a^{\frac{1}{q}}\right)^p$ et donc

$$\ln a^r = \ln a^{\frac{p}{q}} = \ln\left(a^{\frac{1}{q}}\right)^p = p \ln\left(a^{\frac{1}{q}}\right) = p \times \frac{1}{q} \ln a = \frac{p}{q} \ln a = r \ln a$$

Exemple 1 :

Pour $x > 0$, nous avons $\ln \sqrt{x} = \dfrac{1}{2} \ln x$