Chapitre 12

Calcul intégral

Vous trouverez dans ce chapitre un exposé très élémentaire du calcul intégral. Un exposé rigoureux et plus général sera fait dans le cours L_1, et dans ce cours de L_1 nous justifierons des résultats admis en adoptant d'autres points de vue.

12.1 Primitives

Nous savons ce qu'est une fonction dérivée ; si $F(x) = x^3+3x-1$, sa fonction dérivée f est $f(x) = 3x^2+3$
Notre problème est :

Connaissant f, déterminer F que l'on appelle **primitive** de f.
En fait, on résoud l'équation différentielle $F' = f$

12.1.1 Définition

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle $[a;b]$. On dit que la fonction réelle F définie et dérivable sur $[a;b]$ est une primitive de f si, pour tout $x \in [a;b]$, $F'(x) = f(x)$

Exemple 1 :

1. $g(x) = \sin x$ est une primitive de $f(x) = \cos x$
2. $F(x) = \dfrac{x^3}{3}$ est une primitive de $f(x) = x^2$
3. Les primitives de $f(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ sont de la forme $f(x) = k$ où $k \in \mathbb{R}$

12.1.2 Théorème : il y a plusieurs primitives

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle $[a;b]$. Supposons que f admette, sur cet intervalle, une primitive F
Alors f admet, sur cet intervalle, plusieurs primitives qui sont toutes de la forme $G = F + \lambda$ où $\lambda \in \mathbb{R}$

Démonstration

1. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors, $F + \lambda$ est une primitive de f, car $(F+\lambda)' = F^{'} + \lambda^{'} = F^{'} = f$
2. Réciproquement, soit G une primitive de F, alors, $(G-F)^{'} = G^{'} - F^{'} = f - f = 0$; ce qui veut dire que $(G-F) = k$ où $k \in \mathbb{R}$ quelconque.
   Donc, $G = F + k$

Exemple 2 :

1. $g(x) = \sin x + k$ où $k \in \mathbb{R}$ décrit **toutes les primitives** de $f(x) = \cos x$
2. $F(x) = \dfrac{x^3}{3} + k$ où $k \in \mathbb{R}$ décrit toutes les primitives de $f(x) = x^2$

12.1.3 Proposition

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle $[a;b]$ qui admette, sur cet intervalle, deux primitives F et G.
On suppose de plus, qu'il existe $x_0 \in [a;b]$ tel que $F(x_0) = G(x_0)$
Alors, pour tout $x \in [a;b]$ nous avons $F(x) = G(x)$

Démonstration

Il suffit de montrer que, pour tout $x \in [a;b]$ nous avons $F(x) - G(x) = 0$
Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $G = F + \lambda$; ainsi, pour tout $x \in [a;b]$ nous avons $F(x) - G(x) = \lambda$; en particulier pour x_0. Nous aurons alors, $F(x_0) - G(x_0) = 0 = \lambda$
Donc, pour tout $x \in [a;b]$, $F(x) = G(x)$

Remarque 1 :

Ceci exprime que, si une fonction admet des primitives, il en existe une et une seule qui admet une valeur donnée, en un point donné.
Ce qui justifie l'expression :« La primitive qui s'annule en x_0 » par exemple.

12.1.4 Comment calculer des primitives ?

1. **Le polynômes**

   C'est bien entendu les plus simples : les primitives de Ax^n sont de la forme $A\dfrac{x^{n+1}}{n+1} + k$ où $k \in \mathbb{R}$
2. **Les fonctions trigonométriques**
   (a) Les primitives de $\sin(ax+b)$ avec $a \neq 0$ sont de la forme $-\dfrac{1}{a}\cos(ax+b) + k$ où $k \in \mathbb{R}$
   (b) Les primitives de $\cos(ax+b)$ avec $a \neq 0$ sont de la forme $\dfrac{1}{a}\sin(ax+b) + k$ où $k \in \mathbb{R}$
   (c) Les primitives de $\dfrac{1}{\cos^2 x}$ avec $x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right[$ sont de la forme $\tan x + k$ où $k \in \mathbb{R}$
3. **Les fonctions puissances**
   (a) Les primitives de x^n avec $n \in \mathbb{Z} - \{-1\}$ et $x \neq 0$ sont de la forme $\dfrac{x^{n+1}}{n+1} + k$ où $k \in \mathbb{R}$
   (b) Les primitives de x^r avec $r \in \mathbb{Q}^+$ et $x > 0$ sont de la forme $\dfrac{x^{r+1}}{r+1}$ où $k \in \mathbb{R}$
   (c) Les primitives de x^r avec $r \in \mathbb{Q}^- - \{-1\}$et $x > 0$ sont de la forme $\dfrac{x^{r+1}}{r+1}$ où $k \in \mathbb{R}$
4. **Fonctions exponentielles et logarithmes**
   (a) Pourvu que les fonctions soient définies, les primitives des fonctions $\dfrac{u'(x)}{u(x)}$ sont de la forme $\ln|u(x)| + k$ où $k \in \mathbb{R}$
   (b) Les primitives des fonctions $u'(x)\, e^{u(x)}$ sont de la forme $e^{u(x)} + k$ où $k \in \mathbb{R}$
   (c) Pourvu que les fonctions soient définies, les primitives des fonctions x^α où $\alpha \in \mathbb{R} - \{-1\}$ et $x \geq 0$ sont de la forme $\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + k$ où $k \in \mathbb{R}$

Exercice 1 :

Donner l'ensemble des primitives des fonctions suivantes :

1. $f_1(x) = \sin^4 x \cos x$,
2. $f_2(x) = \dfrac{1}{(2x+1)^2}$
3. $f_3(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$,
4. $f_4(x) = xe^{-x^2}$
5. $f_5(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$