B.2 Etude de la fonction logarithme

B.2.1 Limites aux bornes

Nous avons :

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$
2. $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \ln x = -\infty$

Démonstration

1. Démontrons que $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$

   Soit $A > 0$. Il nous faut trouver $N \in \mathbb{R}^{+*}$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$, si $x > N$, alors $\ln x > A$

   Nous appelons $n = \left[\dfrac{A}{\ln 2}\right] + 1$ où $[\bullet]$ désigne la partie entière.

   Nous avons donc $n > \dfrac{A}{\ln 2}$; alors, pour tout $x > 2^n$, nous avons :

   $$\ln x > \ln 2^n = n \ln 2 > \frac{A}{\ln 2} \times \ln 2 = A$$

   Ainsi, pour tout $A > 0$, il existe $N \in \mathbb{R}^{+*}$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$, si $x > N$, alors $\ln x > A$

   Nous avons donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$

2. Démontrons que $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \ln x = -\infty$

   Posons $X = \dfrac{1}{x}$; alors $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \ln x = \lim\limits_{X \to +\infty} \ln \dfrac{1}{X} = \lim\limits_{X \to +\infty} (-\ln X) = -\lim\limits_{X \to +\infty} \ln X = -\infty$

   Ce que nous voulions

B.2.2 Théorème

1. **La fonction logarithme népérien est une bijection de $\mathbb{R}^{*+}$ dans $\mathbb{R}$**
2. **La fonction logarithme $\ln$ est un isomorphisme du groupe abélien multiplicatif $(\mathbb{R}^{*+}, \times)$ vers le groupe abélien additif $(\mathbb{R}, +)$**

Démonstration

1. La fonction ln est continue et strictement croissante de $]0; +\infty[$ dans $\mathbb{R}$; c'est donc une bijection de $]0; +\infty[$ dans $\mathbb{R}$
2. C'est un isomorphisme puisque c'est un homomorphisme bijectif

Remarque 3 :

1. Nous avons donc, pour tout $x > 0$ et tout $y > 0$ l'équivalence :

   $$x = y \Longleftrightarrow \ln x = \ln y$$

2. Pour toute fonction $u : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}^{*+}$, et tout $x_0 \in \mathcal{D}$, nous avons :

   $$\lim_{x \to x_0} u(x) = L \Longleftrightarrow \lim_{x \to x_0} \ln(u(x)) = \ln L$$

B.2.3 Direction asymptotique

Nous avons $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$

Démonstration

1. ▷ Pour tout $x \in]0; +1]$, nous avons $\ln x \leqslant 0$ et donc, en particulier $\ln x < x$

   ▷ Pour tout $t > 1$, nous avons $\dfrac{1}{t} < 1$, et donc, pour tout $x > 1$:

$$\int_1^x \frac{dt}{t} < \int_1^x dt \Longleftrightarrow \ln x < x - 1 < x$$

   Et donc, pour tout $x > 1$, nous avons $\ln x < x$

   Et, en conclusuion, pour tout $x > 0$, nous avons $\ln x < x$

2. Soit $x > 0$ et donc $\sqrt{x} > 0$ et en appliquant l'inégalité $\ln x < x$ vraie pour $x > 0$ à $\sqrt{x}$, nous avons :

$$\ln \sqrt{x} < \sqrt{x} \Longleftrightarrow \frac{1}{2} \ln x < \sqrt{x} \Longleftrightarrow \ln x < 2\sqrt{x}$$

3. Pour $x > 1$, nous avons $0 < \ln x < 2\sqrt{x}$ et donc $0 < \dfrac{\ln x}{x} < \dfrac{2\sqrt{x}}{x} \Longleftrightarrow 0 < \dfrac{\ln x}{x} < \dfrac{2}{\sqrt{x}}$

   Comme, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2}{\sqrt{x}} = 0$, nous en concluons que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$

Remarque 4 :

1. Le fait que $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \ln x = -\infty$ permet de conclure que l'axe des ordonnées $x = 0$ est une asymptote verticale.
2. La courbe représentative de $\ln x$ n'admet pas d'asymptote, mais une direction asymptotique

B.2.4 Limites remarquables

De l'étude de la direction asymptotique, nous tirons les résultats suivants :

1. **Nous avons** $\lim\limits_{x \to +1} \dfrac{\ln x}{x - 1} = 1$ **et** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1 + x)}{x} = 1$
2. $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x \ln x = 0$
3. **Pour tout** $r \in \mathbb{Q}^{*+}$ **et tout** $s \in \mathbb{Q}^{*+}$**, nous avons** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(\ln x)^r}{x^s} = 0$

Démonstration

1. Le rapport $\dfrac{\ln x}{x - 1}$ est le rapport de dérivation $\dfrac{\ln x - \ln 1}{x - 1}$ et donc $\lim\limits_{x \to +1} \dfrac{\ln x}{x - 1}$ est le nombre dérivé de $\ln x$ en $x = 1$, c'est à dire $\lim\limits_{x \to +1} \dfrac{\ln x}{x - 1} = \dfrac{1}{1} = 1$
2. En faisant le changement de variable $x = 1 + h$, nous avons :

$$\lim_{x \to +1} \frac{\ln x}{x - 1} = \lim_{h \to 0} \frac{\ln(1 + h)}{h} = 1$$

3. Soit $x \in]0; 1]$ et faisons le changement de variable $X = \dfrac{1}{x}$ alors,

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x \ln x = \lim_{X \to +\infty} \frac{1}{X} \ln \frac{1}{X} = \lim_{X \to +\infty} -\frac{\ln X}{X} = 0$$

4. Nous avons $\dfrac{(\ln x)^r}{x^s} = \left(\dfrac{\ln x}{x^{\frac{s}{r}}}\right)^r$

   D'autre part, $x = \left(x^{\frac{s}{r}}\right)^{\frac{r}{s}}$, et donc :

$$\left(\frac{\ln x}{x^{\frac{s}{r}}}\right)^r = \left(\frac{\ln\left(x^{\frac{s}{r}}\right)^{\frac{r}{s}}}{x^{\frac{s}{r}}}\right)^r = \left(\frac{r}{s} \times \frac{\ln\left(x^{\frac{s}{r}}\right)}{x^{\frac{s}{r}}}\right)^r = \left(\frac{r}{s}\right)^r \times \left(\frac{\ln\left(x^{\frac{s}{r}}\right)}{x^{\frac{s}{r}}}\right)^r$$

   En faisant le changement de variable $X = x^{\frac{s}{r}}$, nous avons $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(x^{\frac{s}{r}}\right)}{x^{\frac{s}{r}}} = \lim_{X\to+\infty} \frac{\ln X}{X} = 0$

   En conclusion, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{r}{s}\right)^r \times \left(\frac{\ln\left(x^{\frac{s}{r}}\right)}{x^{\frac{s}{r}}}\right)^r = 0$, c'est à dire que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^r}{x^s} = 0$

Remarque 5 :

On dit que la puissance l'emporte sur le logarithme

B.2.5 Représentation graphique de la fonction $\ln x$

1. Tableau de variations

x	0			1		$+\infty$
$\frac{1}{x}$	$\|\|$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$\ln x$	$\|\|$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

2. Graphe de $\ln x$

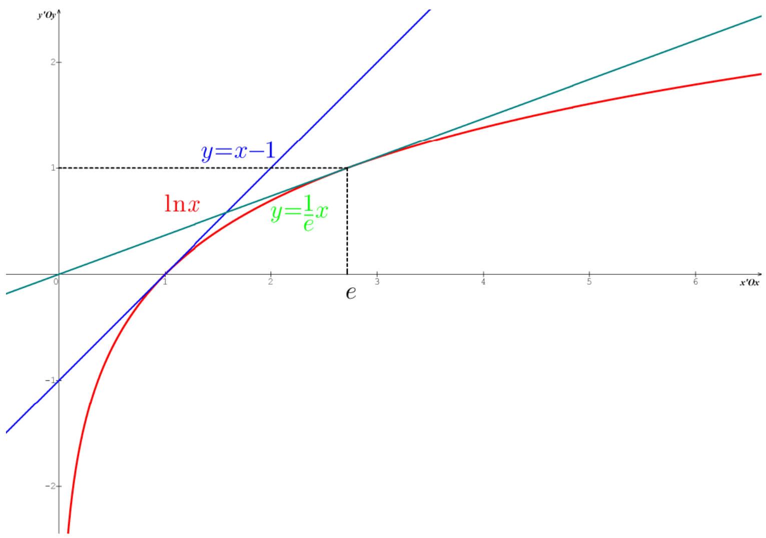

Figure B.2 – Visualisation du graphe de la fonction logarithme népérien

B.2.6 Définition de base du logarithme népérien

Le nombre noté e, unique solution dans $\mathbb{R}^{*+}$ de l'équation $\ln x = 1$ est appelé base du logarithme népérien

Remarque 6 :

Nous admettons que e est un nombre irrationnel, c'est à dire que $e \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et qu'une approximation de e à 10^{-10} près est donnée par : $e \approx 2,7182818285$

B.2.7 Quelques exercices résolus

Exercice 4 :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $\ln(x^2+x+1)=0$.

   Premièrement, il faut vérifier que $x^2+x+1>0$, ce qui est simplement du second degré.
   En second lieu, nous avons $\ln(x^2+x+1)=0$ si et seulement si $x^2+x+1=1$, c'est à dire si et seulement si $x=0$ ou $x=-1$. Les seules solutions à l'équation $\ln(x^2+x+1)=0$ sont $x=0$ ou $x=-1$

2. $\ln(x+1)+\ln(x+3)=\ln(x+7)$.

   Pour que cette équation ait un sens, il faut que $x>-1$, et $x>-3$ et $x>-7$, c'est à dire $x>-1$.
   Supposons donc, maintenant, que $x>-1$. En utilisant la propriété fondamentale du logarithme, nous avons :

   $$\ln(x+1)+\ln(x+3)=\ln(x+7) \Longleftrightarrow \ln(x+1)(x+3)=\ln(x+7) \Longleftrightarrow (x+1)(x+3)=(x+7) \Longleftrightarrow x^2+3x-4=0$$

   Les racines de ce polynôme du second degré sont $x=-4$ et $x=1$. On ne conserve, pour des problèmes de domaine de définition que $x=1$

3. $\ln(x+1)-\ln(x+3)=\ln(x+7)$.

   Cette équation est cousine germaine de la précédente et n'est définie que si $x>-1$ nous avons, bien entendu :

   $$\ln(x+1)-\ln(x+3)=\ln(x+7) \Longleftrightarrow \ln(x+1)=\ln(x+3)+\ln(x+7) \Longleftrightarrow (x+1)=(x+3)(x+7) \Longleftrightarrow x^2+9x+20=0$$

   Les solutions de $x^2+9x+20=0$ sont $x_1=-4$ et $x_2=-5$ qui sont en dehors du domaine de définition.
   Il n'y a donc pas de solution à l'équation $\ln(x+1)-\ln(x+3)=\ln(x+7)$

4. $\ln\left(x^2\right)=\ln 4$.

   Cette équation est définie pour tout $x\neq 0$.
   Donc $\ln\left(x^2\right)=\ln 4 \Longleftrightarrow x^2=4$, c'est à dire si $x=2$ ou $x=-2$