B.3 Exercices sur la fonction logarithme

Exercice 5 :

Simplifier les écritures suivantes :

1. $A = \dfrac{\ln\left(\sqrt{5}+1\right)+\ln\left(\sqrt{5}-1\right)}{2}$.
2. $B = 4\ln\left(\sqrt{3}+1\right)+4\ln\left(\sqrt{3}-1\right)-\ln 8$.

Exercice 6 :

Résoudre, dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $\ln(x+3)+\ln(x+5)=\ln 15$
2. $\ln(x-2)+\ln(x+2)=\ln 45$
3. $\ln(x-3)+\ln(x+1)=\ln\left(x^2+5\right)$
4. $2\ln(x-=)=\ln x-2\ln 2$
5. $\dfrac{1}{2}\ln(3x-1)+\dfrac{1}{2}\ln(8x-2)=\ln(4x-1)$
6. $\ln(x+3)+\ln(x+2)=\ln(x+11)$
7. $\ln\left(x^2+5x+6\right)=\ln(x+11)$
8. $\ln(-x-2)=\ln\left(\dfrac{-x-11}{x+3}\right)$
9. $\ln(x+2)=\ln(-x-11)-\ln(x+3)$

Exercice 7 :

Résoudre les systèmes définis sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ par les relations suivantes :

1. $\begin{cases} x+y = & 65 \\ \ln x+\ln y = & \ln 1000 \end{cases}$
2. $\begin{cases} x^2+y^2 = & 169 \\ \ln x+\ln y = & \ln 60 \end{cases}$

Exercice 8 :

1. Calculer $y\in\mathbb{R}$ tel que :

$$\ln y=\ln\left(7+5\sqrt{2}\right)+8\ln\left(\sqrt{2}+1\right)+7\ln\left(\sqrt{2}-1\right)$$

2. Démontrer l'égalité :

$$\frac{7}{16}\ln\left(3+2\sqrt{2}\right)-4\ln\left(\sqrt{2}+1\right)=\frac{25}{8}\ln\left(\sqrt{2}-1\right)$$

Exercice 9 :

Le but de cet exercice est démontrer que $\forall\alpha>0$ on a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^\alpha}=0$.

1. On pose

$$\begin{cases} g:[1;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \quad t & \longmapsto & g(t)=t-\ln t \end{cases}$$

   Etablir le tableau de variations de f.
2. Montrer que $\forall t\in[1;+\infty[$ on a : $0\leq\ln t\leqslant t$.
3. Poser $t=\sqrt{x}$ et déduire que $\forall x\in[1;+\infty[$ on a : $0\leqslant\dfrac{1}{2}\ln x\leq\sqrt{x}$.
4. En déduire un encadrement de $\dfrac{\ln x}{x}$ pour $x\in[1;+\infty[$.
5. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}$.
6. En déduire alors que $\forall\alpha\in]0;+\infty[$ on a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^\alpha}=0$
7. En déduire que $\lim\limits_{x\to 0}x\ln x=0$.
8. En déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}=+\infty$.

Exercice 10 :

Le but de cet exercice est le calcul de : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(x+1)}{x}$ par des méthodes d'encadrement

1. On pose
$$\left\{ \begin{array}{rcl} f :]-1;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = x - \ln(x+1) \end{array} \right.$$
Etablir le tableau de variations de f.
2. En déduire que $\forall x \in]-1;+\infty[$ on a : $x - \ln(1+x) \geqslant 0$.
3. On pose
$$\left\{ \begin{array}{rcl} g :]-1;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & g(x) = \ln(x+1) - \dfrac{x}{x+1} \end{array} \right.$$
Etablir le tableau de variations de g.
4. En déduire que $\forall x \in]-1;+\infty[$ on a : $\ln(x+1) - \dfrac{x}{x+1} \geqslant 0$.
5. En déduire que $\forall x \in]0;+\infty[$ on a : $\dfrac{1}{x+1} \leqslant \dfrac{\ln(1+x)}{x} \leqslant 1$.
6. En déduire $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln(1+x)}{x}$.
7. De même montrer que $\forall x \in]-1;0[$ on a : $1 \leqslant \dfrac{\ln(x+1)}{x} \leq \dfrac{1}{x+1}$.
8. En déduire $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{\ln(1+x)}{x}$.
9. Calculer $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x}$.
10. Calculer $\lim\limits_{x\to +\infty} x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$.
11. En déduire $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$.

Exercice 11 :

L'objet de cet exercice est de calculer les limites en $+\infty$ des fonctions suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to +\infty} (\ln x - x)$
2. $\lim\limits_{x\to +\infty} \left((\ln x)^2 - \sqrt{x}\right)$
3. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln x + 1}{\ln x}$

Exercice 12 :

Donner les limites en 0 des fonctions suivantes :

1. $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} \sqrt{x}\,(\ln x)^3$
2. $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} \sqrt[5]{x}\,(\ln x)^8$

Exercice 13 :

1. Faire une étude rigoureuse des fonctions $u(x) = \ln x - \dfrac{x-1}{x}$ et $v(x) = x - 1 - \ln x$
2. En déduire que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, si $x > 1$, alors $\dfrac{x-1}{x} < \ln x < x - 1$
3. Appliquer l'inégalité précédente au nombre $\sqrt[n]{e}$
4. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, nous avons $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n < e < \dfrac{1}{\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n}$

Exercice 14 :

A l'aide d'une intégration par parties, calculer les primitives des fonctions suivantes :

1. $\displaystyle\int \ln t \, dt$
2. $\displaystyle\int (\ln t)^2 \, dt$
3. $\displaystyle\int (\ln t)^3 \, dt$

Exercice 15 :

Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \ln\left|\tan \dfrac{x}{2}\right|$
2. $g(x) = \ln|\cos(ax+b)|$
3. $h(x) = \ln|\ln x|$
4. $k(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$

Exercice 16 :

On se propose de téterminer s'il existe des polynômes A et B tels que, pour tout $x > 0$, $\ln x = \dfrac{A(x)}{B(x)}$

1. On suppose que de tels polynômes existent. Démontrer que l'on aurait alors :
$$\frac{B^2(x)}{x} = B(x)\,A'(x) - A(x)\,B'(x)$$
2. En écrivant le polynôme B sous la forme $B(x) = x^n C(x)$ avec $n \in \mathbb{N}$ et C, un polynôme tel que $C(0) \neq 0$, démontrer que la condition obtenue dans la question précédente implique une contradiction
3. Déduire de ce résultat que $\ln x$ n'est pas une fraction rationnelle
4. Retrouver ce résultat en faisant tendre x vers $+\infty$

Exercice 17 :

Calculer les primitives des fonctions suivantes :

1. $\displaystyle\int \frac{4}{2t+1} \, dt$
2. $\displaystyle\int \tan t \, dt$
3. $\displaystyle\int \frac{t}{1+t^2} \, dt$
4. $\displaystyle\int \frac{1}{t\ln|t|} \, dt$
5. $\displaystyle\int \frac{\sin t}{\cos^3 x} \, dt$
6. $\displaystyle\int \frac{\cos(\ln t)}{t} \, dt$

Exercice 18 :

Soit α un nombre réel strictement positif ($\alpha > 0$) et nous considérons $I(\alpha) = \displaystyle\int_1^{\alpha} \cos(\ln x)\, dx$

Calculer $I(\alpha)$ à l'aide de 2 intégrations par parties successives

Exercice 19 :

Une autre définition de la fonction logarithme

A l'aide de l'équation fonctionnelle $f(xy) = f(x) + f(y)$

Soit f une fonction numérique de domaine $\mathcal{D}_f$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ telle que :
$$(\forall x \in \mathcal{D}_f)\,(\forall \in \mathcal{D}_f)\,(f(xy) = f(x) + f(y))$$
On suppose, de plus, f dérivable sur $\mathcal{D}_f$

1. Démontrer que, si f n'est pas constante, alors f n'est pas définie en 0. Quelle est, nécessairement, la valeur de $f(1)$?
2. On suppose que $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^{*+}$ *(Nous aurions tout aussi bien pu choisir $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^{*-}$)*
Pour tout réel $a > 0$, nous considérons la fonction, définie sur $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^{*+}$ par : $g(x) = f(ax)$
   (a) Calculer la fonction dérivée g' de g en fonction de a et de f'
   (b) En utilisant la propriété fondamentale de f, écrire g sous une autre forme et en déduire une autre expression de g'
   (c) En déduire qu'il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x > 0$, nous ayions $f'(x) = \dfrac{k}{x}$