B.4 La fonction exponentielle

La fonction logarithme népérien $\ln x$ étudiée en B.2 est une application continue et strictement croissante de $\mathbb{R}^{*+}$ dans $\mathbb{R}$. c'est donc une bijection qui admet une bijection réciproque

B.4.1 Définition de la fonction exponentielle

On appelle fonction exponentielle, la bijection réciproque de la fonction logarithme
Nous avons donc :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \text{Exp} : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^{*+} \\ x & \longmapsto & \text{Exp}\,(x) \end{array} \right.$$

Remarque 7 :

1. Nous adoptons, pour le moment, la notation Exp pour désigner la fonction exponentielle
2. Il résulte immédiatement, après la définition :
   (a) La fonction Exp est définie sur $\mathbb{R}$
   (b) $y = \text{Exp}\,(x) \Longleftrightarrow y > 0 \; x \in \mathbb{R}$ et $x = \ln y$
   (c) $\text{Exp}\,(0) = 1$ et $\text{Exp}\,(1) = e$
   (d) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\text{Exp}\,(x) > 0$
   (e) La fonction exponentielle est une fonction strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc :
      ▷ Pour tout $a \in \mathbb{R}$ et tout $b \in \mathbb{R}$, $a < b \Longrightarrow \text{Exp}\,(a) < \text{Exp}\,(b)$
      ▷ Pour tout $a \in \mathbb{R}$, $a < 0 \Longrightarrow \text{Exp}\,(a) < 1$
      ▷ Pour tout $a \in \mathbb{R}$, $a > 0 \Longrightarrow \text{Exp}\,(a) > 1$

B.4.2 Propriété fondamentale

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ **et tout** $y \in \mathbb{R}$, $\text{Exp}\,(x + y) = \text{Exp}\,(x) \times \text{Exp}\,(y)$

Démonstration

▷ C'est la propriété d'isomorphisme de groupe qui nous permet d'affirmer ceci
▷ Redémontrons la, en utilisant les fonctions ln et Exp

Soient $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$. Posons $x_1 = \text{Exp}\,(x)$ et $y_1 = \text{Exp}\,(y)$. Nous avons alors :
- $x_1 = \text{Exp}\,(x) \Longleftrightarrow x = \ln x_1$
- $y_1 = \text{Exp}\,(y) \Longleftrightarrow y = \ln y_1$

Donc :

$$x + y = \ln x_1 + \ln y_1 = \ln x_1 y_1 \Longleftrightarrow \text{Exp}\,(x + y) = x_1 y_1 = \text{Exp}\,(x) \times \text{Exp}\,(y)$$

Ce que nous voulions

Remarque 8 :

1. Comme la fonction Exp est une bijection sur $\mathbb{R}$, nous avons, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $y \in \mathbb{R}$:

$$\text{Exp}\,(x) = \text{Exp}\,(y) \Longleftrightarrow x = y$$

2. D'autre part : $\lim\limits_{x \to x_0} u\,(x) = L \Longleftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} \text{Exp}\,(u\,(x)) = \text{Exp}\,(L)$

B.4.3 Conséquences

1. **Pour tout réels $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$, nous avons** $\operatorname{Exp}(x-y) = \dfrac{\operatorname{Exp}(x)}{\operatorname{Exp}(y)}$
2. **Pour tout rationnel $r \in \mathbb{Q}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, nous avons** $\operatorname{Exp}(rx) = (\operatorname{Exp}(x))^r$
3. **Pour tout rationnel $r \in \mathbb{Q}$, nous avons** $\operatorname{Exp}(r) = e^r$

Démonstration

1. La démonstration du premier point est une illustration des propriétés d'homomorphisme de groupe. On peut, une nouvelle fois, le démontrer directement :
   Soient $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$; alors :
   $$\operatorname{Exp}(x) = \operatorname{Exp}(x-y+y) = \operatorname{Exp}(x-y) \times \operatorname{Exp}(y)$$
   C'est à dire $\operatorname{Exp}(x) = \operatorname{Exp}(x-y) \times \operatorname{Exp}(y) \Longleftrightarrow \operatorname{Exp}(x-y) = \dfrac{\operatorname{Exp}(x)}{\operatorname{Exp}(y)}$
2. Soient $r \in \mathbb{Q}$ et tout $x \in \mathbb{R}$ et posons $y = \operatorname{Exp}(x)$. Alors, $y^r = (\operatorname{Exp}(x))^r$ et $\ln y^r = r \ln y$, c'est à dire
   $$\ln\left[(\operatorname{Exp}(x))^r\right] = r\ln\left[(\operatorname{Exp}(x))\right] \Longleftrightarrow \ln\left[(\operatorname{Exp}(x))^r\right] = rx \Longleftrightarrow (\operatorname{Exp}(x))^r = \operatorname{Exp}(rx)$$
3. Pour tout rationnel $r \in \mathbb{Q}$, nous avons $r = r \times 1$ et donc, d'après ce que nous avons vu précédemment :
   $$\operatorname{Exp}(r) = \operatorname{Exp}(1 \times r) = (\operatorname{Exp}(1))^r$$
   Or, $\operatorname{Exp}(1) = e$ et donc $\operatorname{Exp}(r) = e^r$

B.4.4 Définition axiomatique

Nous posons, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\operatorname{Exp}(x) = e^x$ **et nous avons donc :**

$$y = e^x \Longleftrightarrow x \in \mathbb{R} \text{ et } y > 0 \text{ et } x = \ln y$$

Remarque 9 :

1. Désormais, nous adopterons toujours la notation $e^x = \operatorname{Exp}(x)$
2. Les valeurs données à l'exponentielle *(à e^π, par exemple)* peuvent se calculer par des méthodes numériques. Il est évidemment beaucoup plus facile de se référer à une table numérique *(véritable objet de musée)* ou la calculatrice. ($e^\pi = 23,1407$)
3. La fonction exponentielle est aussi appelée fonction exponentielle de base e

B.4.5 Dérivée de la fonction exponentielle

La fonction exponentielle est égale à sa dérivée, autrement dit : $(e^x)' = e^x$

Démonstration

La démonstration est simple et utilise la dérivée des fonctions composées :
$\left(f^{-1}\right)' = \dfrac{1}{f' \circ f^{-1}}$, c'est à dire, ici : $(\operatorname{Exp}(x))' = \dfrac{1}{\ln' \circ \operatorname{Exp}(x)}$
Or, $\ln' x = \dfrac{1}{x}$, et donc $(\operatorname{Exp}(x))' = \dfrac{1}{\ln' \circ \operatorname{Exp}(x)} = \dfrac{1}{\frac{1}{\operatorname{Exp}(x)}} = \operatorname{Exp}(x)$
Ce que nous voulions

B.4.6 Limites aux bornes

Nous avons :

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

2. $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$

Démonstration

1. Démontrons que $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

   Dans un premier temps, comme nous étudions la limite en $+\infty$, on peut supposer $x > 0$.
   Etudions la fonction $\Phi(x) = e^x - (x+1)$ sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
   Nous avons $\Phi'(x) = e^x - 1$, et comme $x \geqslant 0$, la fonction exponentielle étant croissante, nous avons $e^x \geqslant 1$ et donc $\Phi'(x) = e^x - 1 \geqslant 0$, ce qui induit que la fonction Φ est croissante sur $]0; +\infty[$ et, qu'en particulier, pour tout $x \in]0; +\infty[$, nous avons $\Phi(x) \geqslant \Phi(0)$; or, $\Phi(0) = 0$ et donc, pour tout $x \in]0; +\infty[$, nous avons :

   $$e^x - (x+1) \geqslant 0 \Longleftrightarrow e^x \geqslant (x+1)$$

   Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} x + 1 = +\infty$, nous avons $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$
2. Démontrons que $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$

   Faisons le changement de variables $X = \dfrac{1}{x}$; alors :

   $$\lim_{x \to -\infty} e^x = \lim_{X \to +\infty} e^{-X} = \lim_{X \to +\infty} \frac{1}{e^X}$$

   Comme $\lim\limits_{X \to +\infty} e^X = +\infty$, nous avons $\lim\limits_{X \to +\infty} \dfrac{1}{e^X} = 0$, et donc $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x$

Remarque 10 :

1. Un résultat de la proposition ci-dessus montre que la droite $y = 0$ est asymptote à la courbe
2. Toujours dans la proposition ci-dessus, pour montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$, nous avons minoré e^x par un polynôme du premier degré ; en fait il est très possible, au voisinage de $+\infty$ de minorer e^x par un polynôme de degré n

B.4.7 Branches infinies

Nous avons $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$

Démonstration

Nous avons :

$$\ln\left(\frac{e^x}{x}\right) = \ln e^x - \ln x = x - \ln x = x\left(1 - \frac{\ln x}{x}\right)$$

Or, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ et donc $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 - \dfrac{\ln x}{x} = 1$, ce qui fait que $\lim\limits_{x \to +\infty} x\left(1 - \dfrac{\ln x}{x}\right) = +\infty$

En conclusion, $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln\left(\dfrac{e^x}{x}\right) = +\infty$ et donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$

Remarque 11 :

1. En fait, nous avons, pour tout $r \in \mathbb{Q}^{*+}$ et tout $s \in \mathbb{Q}^{*+}$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{rx}}{x^s} = +\infty$

   Comme tout à l'heure, nous écrivons $y = \dfrac{e^{rx}}{x^s}$ et

$$\ln y = \ln\left(\frac{e^{rx}}{x^s}\right) = rx - s\ln x = x\left(r - \frac{s\ln x}{x}\right)$$

   Et la fin de la démonstration est la même
2. On dit, dans ce cas, que **l'exponentielle l'emporte sur la puissance**

B.4.8 Graphe de la fonction exponentielle

Voici le graphe de la fonction exponentielle (figure B.3), graphe que nous aurions très bien pu faire, par symétrie de la la fonction $\ln x$ par rapport à la première bissectrice $y = x$

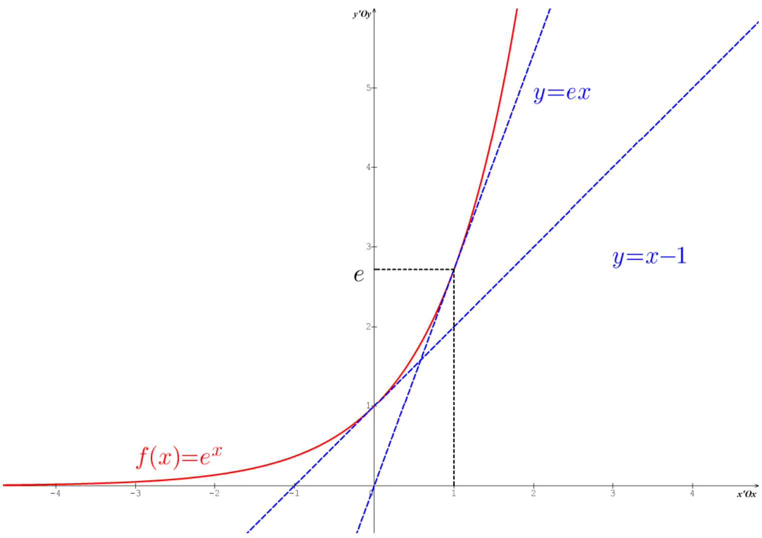

FIGURE B.3 – Le graphe de la fonction exponentielle avec les tangentes remarquables $y = x - 1$ et $y = ex$

Exemple 2 :

On considère la fonction $f(x) = xe^{\frac{1}{2}\left|\ln x^2\right|}$ que nous allons étudier

1. Premièrement, f n'est pas définie pour $x = 0$; ainsi, $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^*$
2. En second lieu, f est impaire ; en effet :

$$f(-x) = -xe^{\frac{1}{2}\left|\ln(-x)^2\right|} = -xe^{\frac{1}{2}\left|\ln x^2\right|} = -f(x)$$

3. Nous réduisons donc le domaine d'étude à $x > 0$; on peut donc dire que, si $x > 0$, alors $\ln x^2 = 2\ln x$
   (a) Si $x \geqslant 1$, alors $\left|\ln x^2\right| = 2\left|\ln x\right| = 2\ln x$ de telle sorte que :

$$f(x) = xe^{\frac{1}{2}\times 2\ln x} = x^2$$

   (b) Maintenant, si $0 < x \leqslant x$ alors $\left|\ln x^2\right| = 2\left|\ln x\right| = -2\ln x = 2\ln\dfrac{1}{x}$ et donc :

$$f(x) = xe^{\frac{1}{2}\times 2\ln\frac{1}{x}} = 1$$

4. D'où le graphe (figure B.4) :

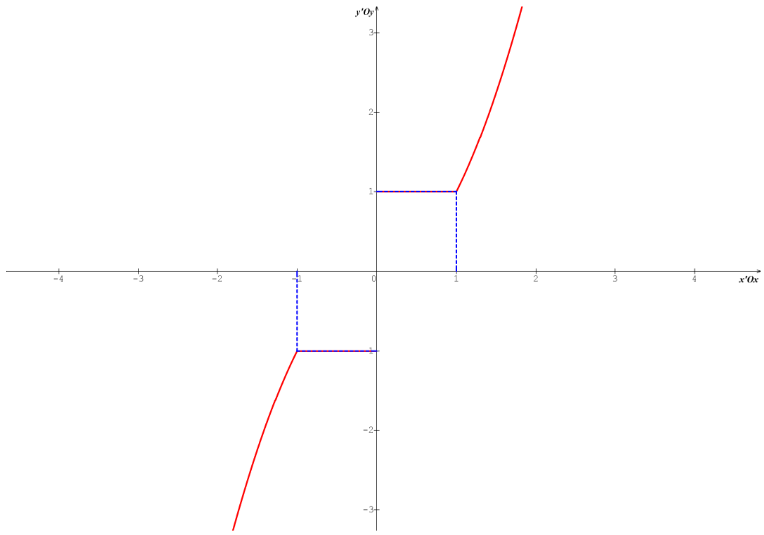

FIGURE B.4 – Le graphe de la fonction $f(x) = xe^{\frac{1}{2}\left|\ln x^2\right|}$

B.5 Exercices sur la fonction exponentielle

Exercice 20 :

Commençons par un exercice simple !
Simplifier les expressions suivantes :

1. $a = e^{3\ln 2}$
2. $b = \ln\sqrt{e}$
3. $c = \ln e^{\frac{1}{3}}$
4. $d = e^{-2\ln 3}$
5. $k = \ln\left(e^{\frac{-1}{2}}\right)$
6. $l = \sqrt[5]{e}$

Exercice 21 :

Résoudre les équations ci-dessous *(Effectuer le changement de variables $y = e^x$)*

1. $e^x - e^{-x} = \dfrac{8}{3}$
2. $e^{2x} - 36e^x + 2 = 0$

Exercice 22 :

Déterminer les primitives sur $\mathbb{R}$ des fonctions définies ci-dessous :

1. $f_1(x) = e^{3x}$
2. $f_2(x) = xe^{x^2}$
3. $f_3(x) = \dfrac{e^x}{1+e^x}$
4. $f_4(x) = \cos x e^{\sin x}$
5. $f_5(x) = xe^{\sqrt{x}}$
6. $f_6(x) = \left(ax^2 + bx + c\right)e^{2x}$

Exercice 23 :

Etudier les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{1}$
2. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{(\ln x)^m}{e^{px}}$ avec $m \in \mathbb{Q}^+$ et $p \in \mathbb{Q}^+$
3. $\lim\limits_{x\to 0} x^n (\ln|x|)^m$ avec $m \in \mathbb{Q}^+$ et $n \in \mathbb{Q}^+$
4. $\lim\limits_{x\to -\infty} x^n e^{px}$ avec $n \in \mathbb{Q}^+$ et $p \in \mathbb{Q}^+$

Exercice 24 :

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ et la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_n = \ln u_n$

1. Démontrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Quelle en est sa limite ?
2. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Donner sa limite.

Exercice 25 :

Résoudre, dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes d'inconnue x :

1. $4e^{-5x} + 3e^{-3x} - e^{-x} = 0$
2. $e^{4x+2} - \dfrac{e^2}{e^{4x+2}} = e^2 - 1$

Exercice 26 :

1. Discuter, suivant les valeurs du paramètre réel a, l'existence des solutions pour le système :

$$\begin{cases} e^x \times e^{2y} = & a \\ 2xy = & 1 \end{cases}$$

   Avec $x \in \mathbb{R}$ et $y_i n\mathbb{R}$
2. Résoudre complètement dans le cas $a = \sqrt{e^5}$

Exercice 27 :

1. On considère les deux intégrales :

$$A = \int_0^x e^t \cos 2t\, dt \qquad B = \int_0^x e^t \sin 2t\, dt$$

   A l'aide d'une intégration par parties aplliquée à A et B, établir une relation entre A et B. En déduire les expressions de A et B
2. On pose :

$$I = \int_0^x e^t \cos^2 t\, dt \qquad J = \int_0^x e^t \sin^2 t\, dt$$

   Calculer $I + J$, $I - J$ et en déduire I et J

Exercice 28 :

Etudier les 2 fonctions réelles f et g de la riable réelle x définies par :

$$f(x) = \ln|e^x - 1| \qquad g(x) = \ln(e^x + 1)$$

Tracer les courbes représentatives F de f et G de g dans un repère orthonormé. Chercher des symétries entre F et G

Exercice 29 :

Soit f la fonction définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par $f(x)\, xe^{|x+1|}$

1. Etudier f et construire sa courbe représentative dans un repère orthonormé
2. Calculer l'aire du domaine $\mathcal{A}$ défini par :

$$\mathcal{A} = \{M(x,y) \text{ où } -1 \leqslant x \leqslant 0 \text{ et } f(x) \leqslant y \leqslant 0\}$$