B.6 Autres fonctions exponentielles, autres fonctions logarithmes

B.6.1 Etude de la fonction $f_\alpha(x) = e^{\alpha x}$ où $\alpha \in \mathbb{R}^*$

On peut commencer à remarquer que nous pouvons prendre $\alpha \neq 0$, car si $\alpha = 0$, alors $f_0(x) = e^{0\times x} = 1$ est une fonction constante et l'étude ne présente pas d'intérêts.

1. **Continuité** : f_α est définie et continue sur $\mathbb{R}$
2. **f_α est un homomorphisme du groupe $(\mathbb{R}, +)$ dans le groupe $(\mathbb{R}^{+*}, \times)$** puisque
$$f_\alpha(x+y) = e^{\alpha(x+y)} = e^{\alpha x}e^{\alpha y} = f_\alpha(x) f_\alpha(y)$$
3. **La dérivée** de $f_\alpha(x)$ est donnée par $f'_\alpha(x) = \alpha e^{\alpha x} = \alpha f_\alpha(x)$
La dérivée est donc du signe de α ; ainsi :
   - ▷ Si $\alpha > 0$, alors f_α est croissante
   - ▷ Si $\alpha < 0$, alors f_α est décroissante
4. **Les limites**
   (a) Pour $\alpha > 0$
      - ▷ $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{\alpha x} = +\infty$
      - ▷ $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{\alpha x} = 0$

   (b) Pour $\alpha < 0$
      - ▷ $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{\alpha x} = 0$
      - ▷ $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{\alpha x} = +\infty$
5. **f_α est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^{+*}$** puisque f_α est monotone et continue.
6. **Graphe de f_α** Figure B.5

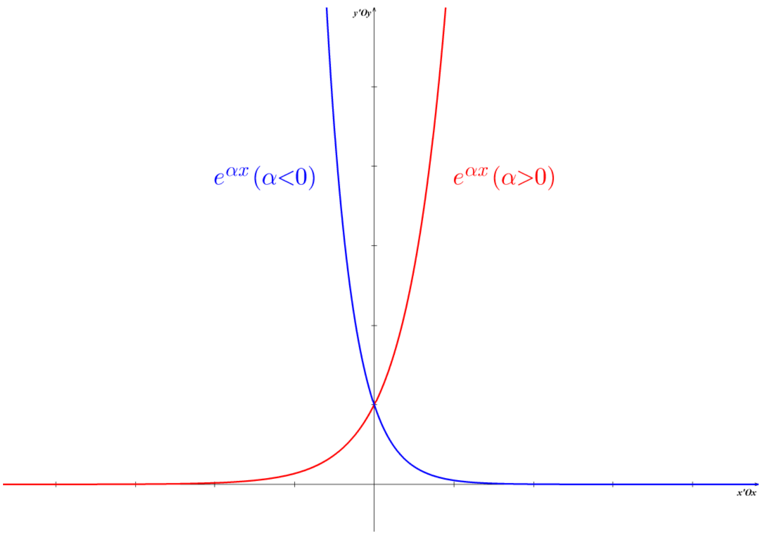

FIGURE B.5 – Allures du graphe de la fonction $f_\alpha(x) = e^{\alpha x}$ pour $\alpha > 0$ et $\alpha < 0$

7. On pose $\alpha = \ln a$ où $a > 0$ et $a \neq 1$; alors, $f_\alpha(x) = e^{\alpha x} = e^{x \ln a}$

B.6.2 Définition de l'exponentielle de base a

On appelle exponentielle de base a l'isomorphisme de groupe de $(\mathbb{R}, +)$ dans le groupe $(\mathbb{R}^{+*}, \times)$ défini par :
$$f_\alpha(x) = e^{x \ln a} \text{ pour } a > 0 \text{ et } a \neq 1$$
Nous notons : $a^x = e^{x \ln a} = \text{Exp}_a(x)$

B.6.3 Conséquences évidentes

1. **Pour tout** $a > 0$ **avec** $a \neq 1$, **nous avons** $\mathrm{Exp}_a(1) = a^1 = a$ **et** $\mathrm{Exp}_a(0) = a^0 = 1$
2. **Pour tout** $y > 0$, **il existe** $x \in \mathbb{R}$ **tel que** $u = a^x = e^{x \ln a}$
3. **Pour tout** $a > 0$ **avec** $a \neq 1$ **et tout** $x \in \mathbb{R}$ **et tout** $y \in \mathbb{R}$, **nous avons :**

   (a) $a^{x+y} = a^x \times a^y$ **et** $a^{x-y} = \dfrac{a^x}{a^y}$

   (b) $a^{xy} = (a^x)^y$

   (c) $\ln a^x = x \ln a$

   (d) $a^x = a^y \Longleftrightarrow x = y$

   (e) $(a^x)' = (\ln a)\, a^x$

Démonstration

Les démonstrations sont simples ; les faire en exercice
Graphe de a^x en figure B.6

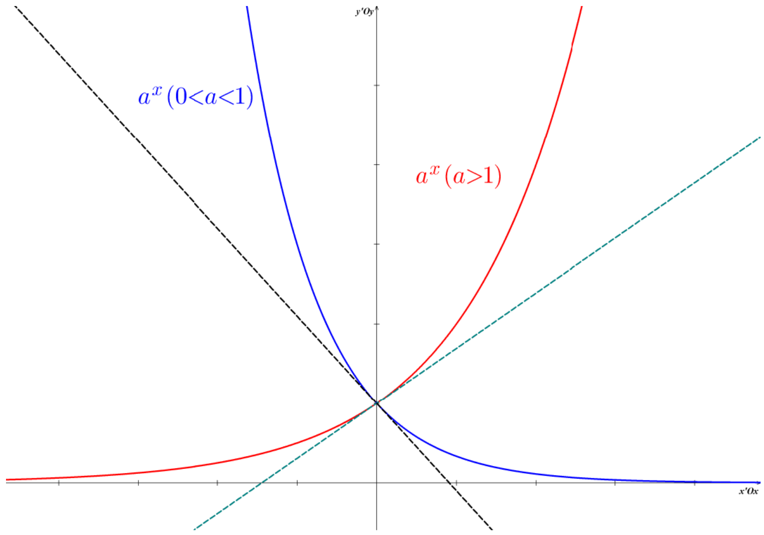

FIGURE B.6 – Allures du graphe des fonction a^x pour $0 < a < 1$ et $a > 1$

B.6.4 La fonction logarithme de base a

On appelle fonction logarithme de base a avec $a > 0$ **et** $a \neq 1$, **la bijection réciproque de la fonction** a^x **et nous la notons** $\log_a(x)$
Nous avons donc :

$$\begin{cases} \log_a : \mathbb{R}^{*+} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \qquad\quad x & \longmapsto & \log_a(x) \end{cases}$$

Et $y = \log_a(x) \Longleftrightarrow x > 0$ **et** $y \in \mathbb{R}$ **et** $x = a^y = e^{y \ln a}$

B.6.5 Proposition

Pour tout $a > 0$ **tel que** $a \neq 1$, **pour tout** $x > 0$, **nous avons** $\log_a(x) = \dfrac{\ln x}{\ln a}$

Démonstration

Soient donc $a > 0$ tel que $a \neq 1$ et $x > 0$. Alors,

$$y = \log_a(x) \iff y \in \mathbb{R} \text{ et } x = a^y \iff \ln x = y \ln a \iff y = \frac{\ln x}{\ln a}$$

Ce que nous voulions

B.6.6 Propriétés du logarithme de base a

1. **Pour tout** $a > 0$ **avec** $a \neq 1$**, nous avons** $\log_a(1) = 0$ **et** $\log_a(a) = 1$
2. **Pour tout** $y \in \mathbb{R}$**, il existe** $x > 0$ **tel que** $y = \log_a(x)$
3. **Pour tout** $a > 0$ **avec** $a \neq 1$ **et tout** $x > 0$ **et tout** $y > 0$**, nous avons :**
   - **(a)** $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$
   - **(b)** $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$
   - **(c)** $\log_a x^y = y \log_a$
   - **(d)** $\log_a x = \log_a y \iff x = y$
   - **(e)** $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$

Démonstration

Les démonstrations sont simples ; les faire en exercice

B.6.7 Limites de la fonction logarithme de base a

Soit $a > 0$ **avec** $a \neq 1$ **; alors :**

1. **Si** $a > 1$**, alors :**
   - **(a)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \log_a(x) = +\infty$
   - **(b)** $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \log_a(x) = -\infty$
2. **Si** $a < 1$**, alors :**
   - **(a)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \log_a(x) = -\infty$
   - **(b)** $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \log_a(x) = +\infty$

Graphe de $\log_a(x)$ en figure B.7

Exemple 3 :

Un grand exemple de logarithme de base quelconque est le logarithme de base 10 que l'on retrouve surtout en physique et en chimie

Exercice 30 :

Montrer que, pour tout $x > 0$, tout $a > 0$ avec $a \neq 1$ et tout $b > 0$ avec $b \neq 1$, $\log_a x = \log_b x \times \log_a b$

Exercice 31 :

1. Démontrer que, pour tout $a > 0$ avec $a \neq 1$, nous avons :

$$(\forall x \in \mathbb{R}^{*+}) \left(\log_a x \times \log_{a^2} x = \frac{1}{2} (\log_a x)^2 \right)$$

2. Résoudre, dans $\mathbb{R}^{*+}$ l'équation définie par $\log_3 x \times \log_9 x = 2$

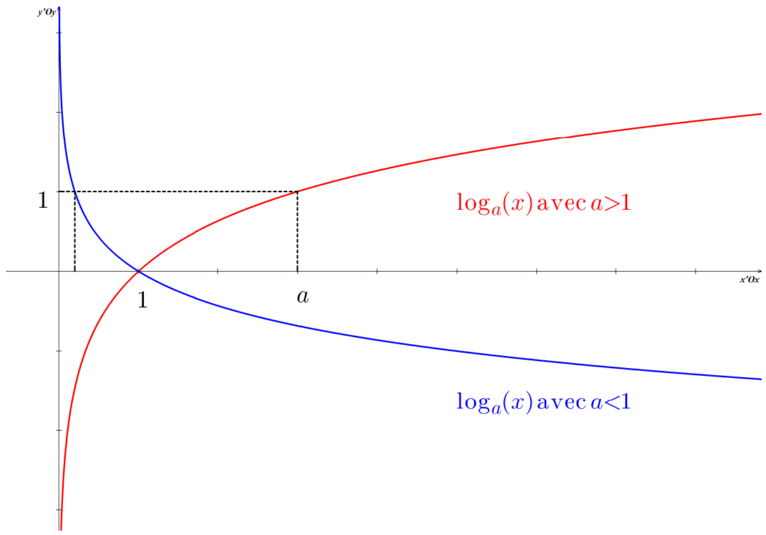

FIGURE B.7 – Allures du graphe des fonction $\log_a(x)$ pour $0 < a < 1$ et $a > 1$

Exercice 32 :

Démontrez que, pour tout nombre réels positifs a,b et c avec $a \neq 1$, $b \neq 1$ et $c \neq 1$:

$$\log_a b \times \log_b c \times \log_c a = 1$$

Généralisation ?

Exercice 33 :

Résoudre les systèmes suivants où les inconnues sont $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$:

1. $\begin{cases} 4\left(\log_x y + \log_y x\right) = & 17 \\ xy = & 243 \end{cases}$
2. $\begin{cases} 7\left(\log_x y + \log_y x\right) = & 50 \\ xy = & 256 \end{cases}$
3. $\begin{cases} 2\log_x y + 2\log_y x = & -5 \\ xy = & e \end{cases}$

Exercice 34 :

Résoudre l'inéquation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$: $\log_a x > \log_{a^3}(3x-2)$

Exercice 35 :

Résoudre les équations d'inconnue $x \in \mathbb{R}$

1. $e^{\ln\left(1-x^2\right)} = -2x+1$
2. $\left(x^2-1\right)e^{\ln(x-2)} = \ln e^{x+1}$
3. $7^{x+\frac{4}{3}} - 5^{3x} = 2\left(7^{x+\frac{1}{3}} + 5^{3x+1}\right)$
4. $2^x + \dfrac{6}{2^x} = 5$
5. $5^{3x} = 7$
6. $3^{x+2} + 9^{x-1} = 1458$