B.7 Fonctions avec exponentielles et Logarithmes

L'objet de cette section est d'étudier les fonctions du type $u(x)^{v(x)}$
Le plus souvent, nous allons procéder par des exemples.

B.7.1 La dérivée de $\Phi(x) = \ln|u(x)|$

Soit $u : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction numérique d'une variable réelle, à valeurs réelles de domaine $\mathcal{D}_u$, dérivable sur $\mathcal{D}_u$. Alors, la dérivée de $\Phi(x) = \ln|u(x)|$ est donnée par :

$$\Phi'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

Démonstration

1. Tout d'abord, le domaine de définition de Φ est :
$$\mathcal{D}_\Phi = \{x \in \mathcal{D}_u \text{ tels que } u(x) \neq 0\}$$
2. Soit $\mathcal{D}_1 = \{x \in \mathcal{D}_u \text{ tels que } u(x) > 0\}$. Alors, $\Phi(x) = \ln|u(x)| = \ln u(x)$ et en utilisant les théorèmes de composition des fonctions dérivables, nous avons : $\Phi'(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$
3. Soit $\mathcal{D}_2 = \{x \in \mathcal{D}_u \text{ tels que } u(x) < 0\}$. Alors, $\Phi(x) = \ln|u(x)| = \ln(-u(x))$ et en utilisant les théorèmes de composition des fonctions dérivables, nous avons : $\Phi'(x) = \dfrac{-u'(x)}{-u(x)} = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$

En remarquant que $\mathcal{D}_\Phi = \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2$, nous avons le résultat.

Remarque 12 :

Cette dérivée nous fait entrevoir de nouvelles primitives ; en effet :

$$\int \frac{u'(x)}{u(x)}\,dx = \ln|u(x)| + K$$

B.7.2 Etude de $f(x) = e^{u(x)}$

1. En supposant u définie, continue et dérivable sur son domaine $\mathcal{D}_u$, nous avons f définie aussi sur $\mathcal{D}_u$
2. La dérivée de f est donnée par : $f'(x) = u'(x)\,e^{u(x)}$

B.7.3 Etude de $g(x) = (u(x))^{v(x)}$

Retenez que dans le cas de fonctions du type $g(x) = (u(x))^{v(x)}$, **il faut toujours passer par l'exponentielle et le logarithme** Et donc : $g(x) = (u(x))^{v(x)} = e^{v(x)\ln u(x)}$. Ce qui confirme que g n'est définie que si $u(x) > 0$

B.7.4 Quelques exemples

1. **Donner** $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

   C'est une question très classique et qui est souvent piégeuse !!
   Comme dit dans B.7.3, il faut passer l'exponentielle et le logarithme :
$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}$$

Il suffit, maintenant, d'étudier $n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$.

Nous avons : $n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}$

Et, $\lim\limits_{n\to+\infty} n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}=\lim\limits_{N\to 0}\dfrac{\ln(1+N)}{N}=1$

Donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$

2. **Etude de la fonction $f(x)=x^x$**

   (a) Nous commençons donc, comme conseillé en B.7.3 par écrire différemment f :

   $$f(x)=x^x=e^{x\ln x}$$

   Nous en déduisons que le domaine de définition de f est $]0;+\infty[$.
   f est donc continue et dérivable sur $]0;+\infty[$ comme composée de fonctions continues et dérivables sur $]0;+\infty[$

   (b) Limites aux bornes

   - ▷ Nous avons $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln x=+\infty$ et donc, $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x\ln x}=\lim\limits_{x\to+\infty} x^x=+\infty$
   - ▷ Nous avons $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x\ln x=0$, et donc $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} e^{x\ln x}=1$

     Nous pouvons donc **prolonger f par continuité à droite de** 0 en posant $f(0)=1$

   (c) Calcul de la dérivée

   Le calcul de la dérivée nous donne : $f'(x)=(\ln x+1)\,e^{x\ln x}$. Le signe de la dérivée ne dépend donc que de celui de $\ln x+1$ Donc :

   - ▷ Si $0<x<\frac{1}{e}$, alors $f'(x)\leqslant 0$ et f est décroissante
   - ▷ Si $x>\frac{1}{e}$, alors $f'(x)\geqslant 0$ et f est croissante

   D'où le tableau de variations :

x	0		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
f'	$\|\|$	-	0	+	
f	1	$\searrow$	$(e)^{\frac{-1}{e}}$	$\nearrow$	$+\infty$

   (d) Et le graphe ! *(Figure B.8)*

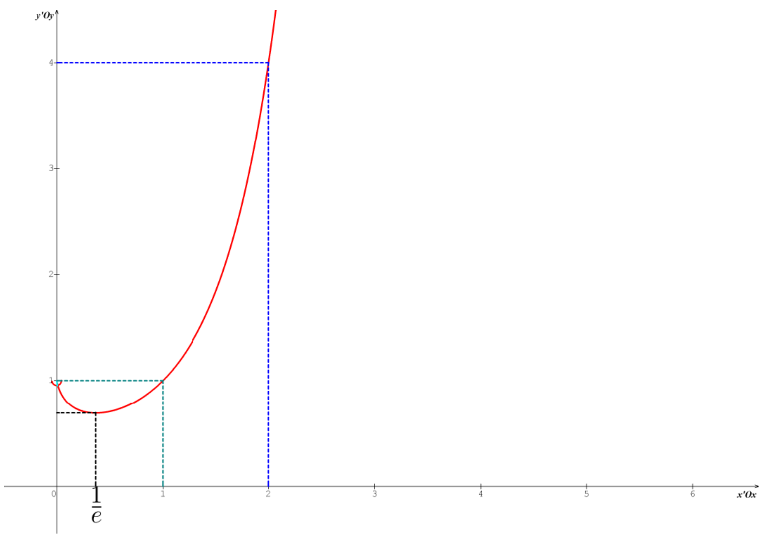

FIGURE B.8 – Le graphe de la fonction $f(x) = x^x$