12.2 Notion d'intégrale

12.2.1 Résultat admis

On admet que si une fonction f est continue sur un intervalle I, elle admet, sur I une primitive F

12.2.2 Définition

Soit f une fonction numérique continue sur un intervalle $[a;b]$; soit F une primitive de f sur $[a;b]$; soit $c \in [a;b]$ et $d \in [a;b]$.
On appelle intégrale de c à d de la fonction f le réel $F(d) - F(c)$, et on note :

$$\boxed{\int_c^d f(t)\,dt = F(d) - F(c) = [F(t)]_c^d}$$

Remarque 2 :

1. Dans l'expression $\int_c^d f(t)\,dt$, t peut être remplacé par n'importe quelle lettre : on dit que t est **une variable muette**.
   Exemple : $\int_c^d f(t)\,dt = \int_c^d f(u)\,du$
2. Nous avons aussi $\int_a^a f(t)\,dt = 0$
3. De plus, $\int_c^d f(t)\,dt = F(d) - F(c) = -(F(c) - F(d)) = -\int_d^c f(t)\,dt$
4. On admet que $\int_a^b f(t)\,dt$ **représente l'aire entre la courbe, l'axe des abscisses et les droites** $x = a$ **et** $x = b$ (cf courbe 12.1)

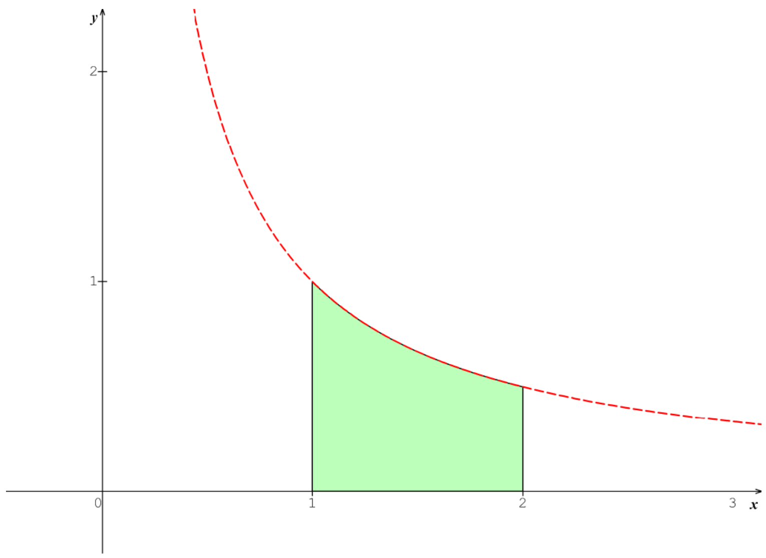

FIGURE 12.1 – $\int_1^2 \frac{1}{t}dt = \ln 2$ représente l'aire comprise entre la courbe $\frac{1}{t}$, l'axe des abscisses et les droites $x = 1$ et $x = 2$

Exemple 3 :

Quelques exemples très simples

1. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t dt = [\sin t]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$
2. Le calcul de $\displaystyle\int_0^1 t^2 dt = \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$

12.2.3 Théorème

Soit f une fonction continue sur $[a;b]$, et soit $c \in [a;b]$
L'unique primitive F de f sur l'intervalle $[a;b]$ telle que $F(c) = 0$ est définie, pour tout $x \in [a;b]$ par :

$$F(x) = \int_c^x f(t)\,dt$$

<u>Démonstration</u>

Soit G une primitive de f. Alors, pour tout $x \in [a;b]$, $\displaystyle\int_c^x f(t)\,dt = G(x) - G(c)$
Donc, $F(x) = G(x) - G(c)$ avec $F(c) = 0$ et $F'(x) = G'(x) = f(x)$
Nous avons donc $F = G$
Ce que nous voulions.

Remarque 3 :

1. $\displaystyle\int_c^x f(t)\,dt$ est **LA** primitive de f qui s'annule en $x = c$
2. Pour $x > 0$, $f(x) = \dfrac{1}{x}$ est une fonction continue ; cette fonction admet donc des primitives qui sont toutes de la forme : $L(x) = \displaystyle\int_c^x \frac{dt}{t}$ où $c > 0$ et $x > 0$; la primitive de $\dfrac{1}{x}$ qui s'annule en $x = 1$ est donnée par : $\ln(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{dt}{t}$

Exercice 2 :

Soit $F(x) = \displaystyle\int_2^x \frac{1}{1 + s^2 + s^3} ds$. Trouver $F'(3)$

Exercice 3 :

Soit f une fonction numérique réelle définie et continue sur l'intervalle fermé borné $[-1;+1]$. Démontrer que la fonction réelle F définie par

$$F(x) = \int_0^{\sin x} f(t)\,dt$$

est dérivable et vérifie la relation

$$F^{'}(x) = \cos x \times f(\sin x)$$

12.2.4 Relation de Chasles

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, f une fonction continue sur I, et a, b et c, 3 points de I Alors,

$$\boxed{\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^b f(t)\,dt}$$

Démonstration

La démonstration est simple. Soit F une primitive de f. Alors :

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a) = (F(b) - F(c)) + (F(c) - F(a)) = \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^b f(t)\,dt$$

Remarque 4 :

Il est essentiel de noter que la relation de Chasles s'étend à tout triplet a, b et c de réels, dès que la fonction f est intégrable au sens de Riemann sur l'intervalle $[\min(a,b,c)\,;\sup(a,b,c)]$

12.2.5 Linéarité de l'intégrale

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I
Soient $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$, alors

$$\boxed{\int_a^b (\lambda f + \mu g)(t)\,dt = \lambda \int_a^b f(t)\,dt + \mu \int_a^b g(t)\,dt}$$

Démonstration

f et g étant continues sur I, y admettent des primitives appelées respectivement F et G. Alors, une primitive de la fonction $\lambda f + \mu g$ est donnée par $\lambda F + \mu G$. Donc,

$$\begin{aligned}\int_a^b (\lambda f + \mu g)(t)\,dt &= [\lambda F(t) + \mu G(t)]_a^b \\ &= \lambda F(b) + \mu G(b) - (\lambda F(a) + \mu G(a)) \\ &= \lambda (F(b) - F(a)) + \mu (G(b) - G(a)) \\ &= \lambda \int_a^b f(t)\,dt + \mu \int_a^b g(t)\,dt\end{aligned}$$

12.2.6 Synthèse

On appelle $\mathcal{C}([a;b])$ l'ensemble des fonctions continues sur l'intervalle $[a;b]$; alors :

1. **$\mathcal{C}([a;b])$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$**
2. **L'application $\Phi : \mathcal{C}([a;b]) \to \mathbb{R}$ telle que pour tout $f \in \mathcal{C}([a;b])$, $\Phi(f) = \int_a^b f(t)\,dt$ est une forme linéaire**

Remarque 5 :

VOICI UNE REMARQUE IMPORTANTE :

Nous n'avons pas $\int_a^b (fg)(t)\,dt = \left(\int_a^b f(t)\,dt\right)\left(\int_a^b g(t)\,dt\right)$

Exemple : Si nous choisissons $f(t) = t$ et $g(t)\frac{1}{t}$ alors, $\int_1^2 (fg)(t)\,dt = \int_1^2 dt = 1$, alors que :

— $\int_1^2 f(t)\,dt = \int_1^2 t\,dt = \left[\frac{t^2}{2}\right]_1^2 = \frac{3}{2}$
— $\int_1^2 g(t)\,dt = \int_1^2 \frac{1}{t}\,dt = [\ln t]_1^2 = \ln 2$

12.2.7 Théorème : positivité de l'intégrale

Soit $f \in \mathcal{C}([a;b])$ une fonction continue sur $[a;b]$ (avec $a < b$)
Supposons que pour tout $x \in [a;b]$, nous avons $f(x) \geqslant 0$; alors

$$\boxed{\int_a^b f(t)\,dt \geqslant 0}$$

Démonstration

Soit F une primitive de f ; alors $F' = f$, et comme f est positive sur $[a;b]$, alors F est croissante sur $[a;b]$, et nous avons donc $F(b) \geqslant F(a)$

Comme $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$, nous avons le résultat.

Remarque 6 :

1. De la même manière, si, pour tout $x \in [a;b]$, nous avons $f(x) \leqslant 0$, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt \leqslant 0$
2. **La réciproque est fausse :**

   Montrer que $\displaystyle\int_{-1}^{+3} t^3\,dt$ est positive. $f(t) = t^3$ est-elle positive sur $[-1;3]$?

Exercice 4 :

Montrer que si f est positive sur un intervalle I, et que si $a \in I$, $b \in I$, $c \in I$ et $d \in I$ tels que $a < c < d < b$, alors

$$\int_c^d f(t)\,dt \leqslant \int_a^b f(t)\,dt$$

12.2.8 Corollaire

Soit $f \in \mathcal{C}([a;b])$ et $g \in \mathcal{C}([a;b])$ deux fonctions continues sur $[a;b]$ (avec $a < b$) telles que pour tout $x \in [a;b]$, nous avons $f(x) \leqslant g(x)$; alors

$$\boxed{\int_a^b f(t)\,dt \leqslant \int_a^b g(t)\,dt}$$

Démonstration

Il suffit d'applique le théorème 12.2.7 à la fonction $\Phi(x) = g(x) - f(x)$, puis utiliser la linéarité de l'intégrale (Théorème 12.2.5)

Remarque 7 :

On dit que l'intégrale respecte la relation d'ordre

12.2.9 Théorème : intégrales et valeur absolue

Soit $f \in \mathcal{C}([a;b])$ une fonction continue sur $[a;b]$ alors,

$$\boxed{\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dt}$$

Démonstration

Pour tout $t \in [a;b]$, nous avons $-|f(t)| \leqslant f(t) \leqslant |f(t)|$
L'intégrale respectant la relation d'ordre, nous avons alors :

$$-\int_a^b |f(t)|\ dt \leqslant \int_a^b f(t)\ dt \leqslant \int_a^b |f(t)|\ dt$$

Dont nous déduisons :

$$\left|\int_a^b f(t)\ dt\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\ dt$$

12.2.10 Corollaire

Soit f continue sur un intervalle I, et on suppose que pour tout $x \in I$, $|f(x)| \leqslant M$; alors, pour tout $a \in I$ et tout $b \in I$,

$$\boxed{\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| \leqslant M\,|a-b|}$$

Démonstration

Supposons $a < b$ Alors,d'après le théorème ci-dessus,

$$\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| \leq \int_a^b |f|(t)\,dt \leq M(b-a) = M\,|a-b|$$

Supposons $b < a$ Alors, $\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| = \left|\int_b^a f(t)\,dt\right| \leq \int_b^a |f|(t)\,dt \leq M(a-b) = M\,|a-b|$

Ce que nous voulions

12.2.11 Valeur moyenne

Soit $f \in \mathcal{C}([a;b])$ une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$
On appelle valeur moyenne de f sur l'intervalle $[a;b]$, le nombre μ tel que :

$$\boxed{\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt}$$

Remarque 8 :

C'est une notion que l'on retrouve beaucoup en physique *(intensité, puissance moyenne)* ou même en probabilité.

12.2.12 Théorème

Soit $f \in \mathcal{C}([a;b])$, et m et M sont les bornes de f sur l'intervalle $[a;b]$
Alors, la valeur moyenne μ de f est telle que

$$m \leq \mu \leq M$$

Démonstration

On suppose $a < b$ Comme $m \leq f \leq M$, nous avons, en utilisant la positivité de l'intégrale $\int_a^b m dt \leqslant \int_a^b f(t)\,dt \leqslant \int_a^b M dt$, c'est à dire $m(b-a) \leqslant \int_a^b f(t)\,dt \leqslant M(b-a)$; comme $b-a > 0$, on peut diviser par $b-a$ sans changer le sens des inégalités ; d'où le résultat.

On suppose $b < a$ La démonstration est en tout point semblable ; on part de $\int_b^a m dt \leqslant \int_b^a f(t)\,dt \leqslant \int_b^a M dt$, et on termine ensuite, en faisant attention au fait que $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt = \frac{1}{a-b}\int_b^a f(t)\,dt$

12.2.13 Corollaire

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a;b]$, alors, il existe $c \in]a;b[$ tel que

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt$$

Démonstration

f étant continue sur $[a;b]$ y est bornée, atteint ses bornes, et toutes les valeurs entre ses bornes *(c'est le théorème de la valeur intermédiaire)* ; comme $m \leqslant \mu \leqslant M$ il existe donc $c \in]a;b[$ tel que