12.3 Exercices sur le calcul intégral

Exercice 5 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_1^n \frac{\sin nx}{nx}\, dx$

1. Démontrer que $|I_n| \leqslant \displaystyle\int_1^n \frac{1}{nx}\, dx$
2. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n$

Exercice 6 :

Que pensez vous des égalités suivantes :

1. $\displaystyle\int_{-1}^{1} e^{\sin x} dx = 0$
2. $\displaystyle\int_{1}^{+2} \sqrt{1+x^8} dx = \frac{\sqrt{2}}{8}$
3. $\displaystyle\int_{1}^{+4} (e^x - x)\, dx = -1$
4. $\displaystyle\int_{-1}^{-2} \left(x^2+1\right) dx = \frac{-10}{3}$

Exercice 7 :

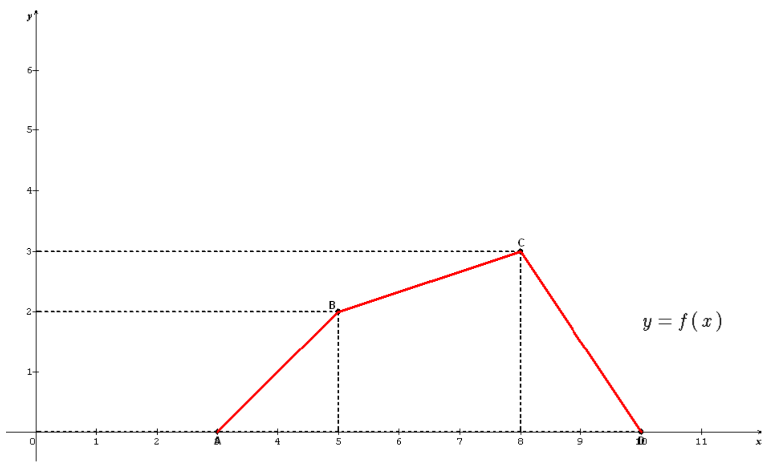

FIGURE 12.2 – Trouver une formule pour f

1. Trouver une expression de f dont le graphe est ligne brisée formant le quadrilatère $ABCD$ (figure 12.2)
2. Calculer $\displaystyle\int_3^{10} f(t)\, dt$
3. Trouver l'aire du quadrilatère $ABCD$ au moyen de la géométrie et comparer avec la question précédente

Exercice 8 :

Soit $f : [0;1] \to [0;1]$ une fonction intégrable sur l'intervalle $[0;1]$ et on appelle, pour $n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 2$, $I_n = \displaystyle\int_{\frac{1}{n}}^{1-\frac{1}{n}} f(t)\, dt$

1. Montrez que pour $n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 2$, $0 \leq I_n \leq 1$
2. Montrez que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}, n \geq 2}$ est croissante.
3. Montrez que $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n = \displaystyle\int_0^1 f(t)\, dt$

Exercice 9 :

Trouver un encadrement de chacune des intégrales suivantes, si elles existent :

1. $I_1 = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{(3+2\cos t)^2}$
2. $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{\sqrt{1-t^n}}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$; en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$

Exercice 10 :

Calculez $\displaystyle\int_{-3}^{+5} |x-1| + |x| + |x+1|\, dx$

Exercice 11 :

On suppose que :

$$f(t) = \begin{cases} t^2 & \text{si } 0 \leqslant t \leqslant 1 \\ 1 & \text{si } 1 \leqslant t \leqslant 5 \\ (t-6)^2 & \text{si } 5 \leqslant t \leqslant 6 \end{cases}$$

1. Tracer le graphe de f sur l'intervalle $[0, 6]$
2. Trouver $\displaystyle\int_0^6 f(t)\, dt$
3. Trouver $\displaystyle\int_0^6 f(x)\, dx$
4. Soit $F(t) = \displaystyle\int_0^t f(s)\, ds$. Donner la formule donnant $F(t)$ et tracer le graphe de F
5. Calculer $F'(t)$ pour $t \in [0, 6]$

Exercice 12 :

Démontrer que si $x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$, alors, $\frac{2\sqrt{2}}{\pi} x \leq \sin x \leq x$; en déduire un encadrement de $\displaystyle\int_{0,3}^{0,7} \sin t dt$

Exercice 13 :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous appelons $u_n = \displaystyle\int_0^n \frac{1}{1+t^2}\, dt$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée.

Exercice 14 :

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont le terme général est défini par $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+2x+4x^2}\, dx$

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons $u_n \geqslant 0$
2. Etudier les variations de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$
3. Trouver un réel $a > 0$ tel que, pour tout $x \in [a; b]$, nous ayions $\frac{1}{1+2x+4x^2} \leqslant a$. En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$