12.4 Etude de $\int_c^x f(t)\,dt$

Nous commençons par un outil très important et pourtant très simple, de calcul de primitives ; de plus la démonstration en est très élémentaire.

12.4.1 Intégration par parties

Soient u et v deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle $[a;b]$, et telles que les dérivées soient continues (Dans ces cas, on dit que u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$)
Alors, pour tout $x \in [a;b]$

$$\boxed{\int_a^x u(t)\,v'(t)\,dt = [u(t)\,v(t)]_a^x - \int_a^x u'(t)\,v(t)\,dt}$$

Démonstration

Nous avons :$(u(t)\,v(t))' = u(t)\,v'(t) + u'(t)\,v(t)$
Les dérivées étant continues, donc intégrables, nous pouvons écrire :

$$\int_a^x (u(t)\,v(t))'\,dt = [u(t)\,v(t)]_a^x = \int_a^x u(t)\,v'(t)\,dt + \int_a^x u'(t)\,v(t)\,dt$$

D'où le résultat.

Remarque 9 :

L'intégration par parties permet de calculer des intégrales peu commodes ! !

Exemple 4 :

Calculons $\int_0^x t\sin t dt$. Pour ce faire, on pose :

$$\left\{\begin{array}{ll} u(t) = t & u'(t) = 1 \\ v'(t) = \sin t & v(t) = -\cos t \end{array}\right\}$$

Donc,

$$\int_0^x t\sin t dt = [-t\cos t]_0^x - \int_0^x -\cos t dt = -x\cos x + \int_0^x \cos t dt = -x\cos x + \sin x$$

Toutes les primitives de $t\sin t$ sont donc de la forme $-x\cos x + \sin x + \lambda$

12.4.2 Lemme de Riemann-Lebesgue pour les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$

Soit $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$

Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_a^b f(t)\sin nt dt = 0$

Démonstration

Faisons une intégration par parties en posant :

$$\begin{array}{ll} u(t) = f(t) & u'(t) = f'(t) \\ v'(t) = \sin nt & v(t) = -\dfrac{1}{n}\cos nt \end{array}$$

De telle sorte que

$$\int_a^b f(t)\sin nt dt = \left[-\frac{f(t)}{n}\cos nt\right]_a^b + \frac{1}{n}\int_a^b f^{'}(t)\cos nt dt$$

Or,

$$\left[-\frac{f(t)}{n}\cos nt\right]_a^b = \frac{f(a)\cos na - f(b)\cos nb}{n}$$

Et en utilisant la valeur absolue,

$$\left|\frac{f(a)\cos na - f(b)\cos nb}{n}\right| \leqslant \frac{|f(a)| + |f(b)|}{n}$$

Ce qui termine de montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{f(a)\cos na - f(b)\cos nb}{n} = 0$

Ensuite $\left|\dfrac{1}{n}\displaystyle\int_a^b f^{'}(t)\cos nt dt\right| \leqslant \dfrac{1}{n}\displaystyle\int_a^b \left|f^{'}(t)\cos nt\right| dt \leqslant \dfrac{1}{n}\displaystyle\int_a^b \left|f^{'}(t)\right| dt$

Par hypothèse,f est de classe $\mathcal{C}^1$, et donc, $f^{'}$, et par conséquent $\left|f^{'}\right|$ sont intégrables sur $[a;b]$, ce qui montre que $\displaystyle\int_a^b \left|f^{'}(t)\right| dt$ est un nombre fixe ; d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n}\displaystyle\int_a^b \left|f^{'}(t)\right| dt = 0$

D'où, en faisant la synthèse des résultats, nous avons bien $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_a^b f(t)\sin nt dt = 0$

12.4.3 Changement de variables

Soit φ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I. Alors, pour toute fonction f définie et continue sur $\varphi(I)$, et tout $x_0 \in I$, nous avons :

$$\int_{x_0}^x f[\varphi(u)]\,\varphi^{'}(u)\,du = \int_{\varphi(x_0)}^{\varphi(x)} f(t)\,dt$$

Démonstration

Elle est très simple et s'obtient à partir de la dérivée des fonctions composées.

Remarque 10 :

Seuls les changements de variable monotone ont un intérêt pratique ; Dans ces cas, $\varphi([x_0;x]) = [\varphi(x_0);\varphi(x)]$ ou $\varphi([x_0;x]) = [\varphi(x);\varphi(x_0)]$ suivant que φ est croissante ou décroissante.

Exemple 5 :

La démarche de changement de variables est largement inspirée par celle des physiciens.

Calculer $\displaystyle\int_0^x \frac{dt}{1+\sqrt{1+t}}$

On effectue le changement de variables $z = \sqrt{1+t}$; nous calculons maintenant $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$ qui se lit : **"dérivée de z par rapport à t"**

Donc, $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2\sqrt{1+t}} = \dfrac{1}{2z}$; donc, $\begin{cases} \mathrm{d}t = 2z\mathrm{d}z \\ t = z^2 - 1 \end{cases}$

Donc, $\displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+\sqrt{1+t}} = \int_1^{\sqrt{1+x}} \frac{2z\mathrm{d}z}{1+z}$ Il ne reste plus qu'à décomposer $\dfrac{2z}{1+z}$ en éléments simples ; or, $\dfrac{2z}{1+z} = 2 - \dfrac{2}{1+z}$, et nous en déduisons que $\displaystyle\int_1^{\sqrt{1+x}} \frac{2z\mathrm{d}z}{1+z} = \int_1^{\sqrt{1+x}} 2\mathrm{d}z -$

$2\int_1^{\sqrt{1+x}} \frac{\mathrm{d}z}{1+z}$
D'où

$$\boxed{\int_0^x \frac{dt}{1+\sqrt{1+t}} = 2\left[\sqrt{1+x}-1\right] - 2\ln\left(\sqrt{1+x}+1\right) + 2\ln 2}$$

Exercice 15 :

1. Calculer $\int_2^5 \frac{t^3 dt}{\sqrt{t-1}}$ en effectuant le changement de variable $z = \sqrt{t-1}$
2. Calculer $\int_0^x \frac{dt}{1+\sqrt{t}}$
Avant d'entamer la résolution, il faut se poser plusieurs questions : domaine de validité ? (ici, $x \geq 0$) Quel changement de variable ? Ici, le plus évident est $u = \sqrt{t}$

12.4.4 Exercice résolu

A l'aide du changement de variable $t = e^x$, calculer

$$\int_0^1 \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}\, e^x\, dx$$

Le fait que le changement de variable nous soit donné nous simplifie grandement la vie ! !
Si $t = e^x$, alors $\frac{dt}{dx} = e^x$, ce qui veut dire que $dt = e^x dx$
D'autre part, si $0 \leq x \leq 1$, alors $1 \leq t \leq e$, et l'intégrale devient :

$$\int_0^1 \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}\, e^x\, dx = \int_1^e \frac{t^2-1}{t^2+1}\, dt$$

Il faut donc, maintenant, décomposer en éléments simples $\frac{t^2-1}{t^2+1}$, et c'est très facile, car

$$\frac{t^2-1}{t^2+1} = \frac{t^2+1-2}{t^2+1} = 1 - \frac{2}{t^2+1}$$

D'où, le calcul de l'intégrale nous donne :

$$\int_1^e \frac{t^2-1}{t^2+1}\, dt = \int_1^e 1\, dt - \int_1^e \frac{2}{t^2+1}\, dt$$

Ce qui nous donne

$$\int_1^e \frac{t^2-1}{t^2+1}\, dt = e - 1 - [2\arctan t]_1^e = e - 1 - 2\arctan e + \frac{\pi}{2}$$

Au final,

$$\boxed{\int_0^1 \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}\, e^x\, dx = e - 1 - 2\arctan e + \frac{\pi}{2}}$$

12.4.5 Applications du changement de variables

1. **Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction paire ; soit $a > 0$, et on suppose $[-a; a] \subset I$; alors :**

$$\int_{-a}^{+a} f(t)\,\mathrm{d}t = 2\int_0^{+a} f(t)\,\mathrm{d}t$$

2. **Par contre, si f est impaire sur I, alors**
$$\int_{-a}^{+a} f(t)\,\mathrm{d}t = 0$$
3. **Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction périodique et de période T ;alors, pour tout $a \in \mathbb{R}$**
$$\int_{a}^{a+T} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{0}^{T} f(t)\,\mathrm{d}t$$

Démonstration

1. $\displaystyle\int_{-a}^{+a} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-a}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{+a} f(t)\,\mathrm{d}t$
   En effectuant le changement de variable $t = -u$ dans $\displaystyle\int_{-a}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t$, et on obtient :
$$\int_{-a}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_{a}^{0} f(-t)\,\mathrm{d}t = \int_{0}^{a} f(-t)\,\mathrm{d}t$$
   Comme f est paire, nous avons $f(-t) = f(t)$, ce qui fait que
$$\int_{-a}^{+a} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{0}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{+a} f(t)\,\mathrm{d}t = 2\int_{0}^{+a} f(t)\,\mathrm{d}t$$
2. Si f est impaire, nous faisons le même changement de variable $t = -u$, mais, nous avons $f(-t) = -f(t)$, ce qui fait que :
$$\int_{-a}^{+a} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{0}^{a} -f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{+a} f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_{0}^{+a} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{+a} f(t)\,\mathrm{d}t = 0$$
3. En utilisant la relation de Chasles,
$$\int_{a}^{a+T} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{a}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{T} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{T}^{a+T} f(t)\,\mathrm{d}t$$
   Dans l'intégrale $\displaystyle\int_{a}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t$ nous faisons le changement de variable $u = x - T$ et donc $\mathrm{d}u = \mathrm{d}x$ et si $a \in [a; 0]$, alors $x \in [a+T; T]$, et
$$\int_{a}^{0} f(u)\,\mathrm{d}u = \int_{a+T}^{T} f(u+T)\,\mathrm{d}u = \int_{a+T}^{T} f(u)\,\mathrm{d}u$$
   Ce qui termine de montrer que
$$\int_{a}^{a+T} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{0}^{T} f(t)\,\mathrm{d}t$$

Exemple 6 :

Exemples d'applications

1. $\displaystyle\int_{-\pi}^{+\pi} \cos u \mathrm{d}u = \int_{0}^{2\pi} \cos u \mathrm{d}u = 2\int_{0}^{+\pi} \cos u \mathrm{d}u$
2. $\displaystyle\int_{-1}^{+1} |u|\,\mathrm{d}u = 2\int_{0}^{1} u \mathrm{d}u$
3. $\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u^2}} = 2\int_{0}^{+\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u^2}} = [\arcsin u]_{\frac{-1}{2}}^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{3}$
4. Pour f périodique et de période T, calculez $\displaystyle\int_{0}^{nT} f(t)\,dt$

12.5 Tableau donnant quelques primitives

Intervalle de définition	**Fonction**	**Fonction primitive**
$\mathbb{R}$	x^m avec $m \in \mathbb{N}$	$\dfrac{x^{m+1}}{m+1} + k$
$\mathbb{R}^*$	x^m avec $m \in \mathbb{Z}$ et $m < -1$	$\dfrac{x^{m+1}}{m+1} + k$
$]0,\ +\infty[$	x^α avec $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\alpha \neq -1$	$\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + k$
$\mathbb{R}^*$	$\dfrac{1}{x}$	$\ln\|x\| + k$
$\{x \in \mathbb{R} \text{ tq } u(x) \neq 0\}$	$\dfrac{u'(x)}{u(x)}$	$\ln\|u(x)\| + k$
$\mathbb{R}$	e^x	$e^x + k$
$\mathbb{R}$	$u'(x)\, e^{u(x)}$	$e^{u(x)} + k$
$\mathbb{R}$	a^x avec $a > 0$ et $a \neq +1$	$\dfrac{a^x}{\ln a} + k$
$\mathbb{R}$	$\sin x$	$-\cos x + k$
$\mathbb{R}$	$\cos x$	$\sin x + k$
$\left]-\dfrac{\pi}{2}\ \dfrac{\pi}{2}\right[$	$\tan x$	$-\ln\|\cos x\| + k$
$]-1\ \ +1[$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x + k$
$]-1\ \ +1[$	$\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos x + k$
$\mathbb{R}$	$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\arctan x + k$
$x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) > 0$	$f'(x)\,(f(x))^\alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R}^* - \{-1\}$	$\dfrac{(f(x))^{\alpha+1}}{\alpha+1} + k$
$x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) \neq 0$	$f'(x)\,(f(x))^n$ avec $n \in \mathbb{Z} - \{-1\}$	$\dfrac{(f(x))^{n+1}}{n+1} + k$