12.6 Exercices sur le calcul intégral

Exercice 16 :

1. Trouver tous les polynômes P du second degré tels que $\displaystyle\int_x^{x+1} P(t)\,dt = x^2+1$
2. Donner une méthode pour calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2$

Exercice 17 :

Calculs simples

1. $I_1 = \displaystyle\int_0^1 t\left(t^2+1\right)dt$
2. $I_2 = \displaystyle\int_0^1 t^2\sqrt{t^3+1}dt$
3. $I_3 = \displaystyle\int_0^1 \frac{-2t}{3t^2+\sqrt{2}}dt$
4. $I_4 = \displaystyle\int_{-1}^0 \frac{t^2-1}{t+2}dt$
5. $I_5 = \displaystyle\int_0^1 \frac{t-2}{2t-3}dt$
6. $I_6 = \displaystyle\int_2^3 \frac{dt}{t(\ln t)^2}$
7. $I_7 = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^t}{e^t+1}dt$
8. $I_8 = \displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{e^t+1}$
9. $I_9 = \displaystyle\int_{-1}^1 \frac{dt}{1+t^2}$
10. $I_{10} = \displaystyle\int_1^8 \frac{\theta^2+1}{\theta^4}d\theta$
11. $I_{11} = \displaystyle\int_2^1 (1-x)^6\,dx$

Exercice 18 :

1. Calculez la dérivée de $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2+1}$
2. Trouvez $\displaystyle\int_0^1 \frac{3x^2+x^4}{\left(1+x^2\right)^2}dx$

Exercice 19 :

1. Montrer qu'il existe a, b et c tel que $\dfrac{2x^3+13x^2+24x+2}{(x+3)^2} = ax+b+\dfrac{c}{(x+3)^2}$.
2. En déduire une primitive de $\dfrac{2x^3+13x^2+24x+2}{(x+3)^2}$ sur $]-3;+\infty[$.
3. Avec la même méthode trouver une primitive de $\dfrac{4x^3+10x^2+3x-3}{(2x+3)^2}$ sur $\left]-\infty;-\dfrac{3}{2}\right[$.

Exercice 20 :

1. Montrer que : $x^2+1 = \dfrac{1}{2}\left((x+1)^2+(x-1)^2\right)$.
2. En déduire une primitive de $f(x) = \dfrac{x^2+1}{(x^2-1)^2}$ sur $]-1;1[$.

Exercice 21 :

Intégration par parties

1. $I_1 = \int_1^2 \ln t dt$
2. $I_2 = \int_1^2 t^\alpha \ln t dt$ avec $\alpha \in \mathbb{R} - \{-1\}$
3. $I_3 = \int_1^2 \cos(\ln t)\, dt$
4. $I_4 = \int_0^1 \arctan t dt$
5. $I_5 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \cos^2 t dt$
6. $I_6 = \int_0^1 t \arctan t dt$
7. $I_7 = \int_0^x te^{-t} dt$
8. $I_8 = \int_0^\pi e^t \cos t dt$

Exercice 22 :

Changements de variables
A l'aide du changement de variables proposé, calculez :

1. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos x}{1+\cos x} \sin x \; dx$ On posera $t = \cos x$
2. $\int_0^1 \frac{dx}{x^2+x+1}$ Poser $x = \frac{1}{2}\left(t\sqrt{3}-1\right)$
3. $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{dx}{\cos x}$ Poser $\sin x = t$

Exercice 23 :

Calculer les intégrales suivantes, en utilisant un changement de variables :

1. $I_1 = \int_0^x \frac{dt}{a^2+t^2}$ avec $a \neq 0$
2. $I_2 = \int_0^1 \frac{x^2}{x^6+1} dx$
3. $I_3 = \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$
4. $I_4 = \int_0^x \frac{\tan t}{1+\sin^2 t} dt$
5. $I_5 = \int_0^x \frac{t^6}{t^4+1} dt$
6. $I_6 = \int_0^x \tan^2 t dt$

Exercice 24 :

Donner les dérivées des fonctions suivantes :

1. $F_1(t) = \int_0^t \frac{3}{(x^4+x^3+1)^6} dx$
2. $F_2(t) = \int_3^t \frac{1}{x^4+x^6} dx$
3. $F_3(t) = \int_t^3 x^2 (x+1)^5 dx$
4. $F_4(t) = \int_t^4 \frac{u^4}{(u^2+1)^6} du$

Exercice 25 :

1. (a) Etudier les variations de la fonction $u(x) = 3x^2 - 3x^3$
   (b) Vérifier qu'en particulier $u\left(\left[\frac{-1}{2}, \frac{3}{2}\right]\right) \subset [0,1]$
   (c) Montrer, en particulier que le point $A\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ est centre de symétrie de la fonction $u(x) = 3x^2 - 3x^3$
2. Soit f continue sur $[0,1]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. On considère l'intégrale

$$\int_{\frac{-1}{2}}^{\frac{3}{2}} f\left(3x^2 - 3x^3\right) dx$$

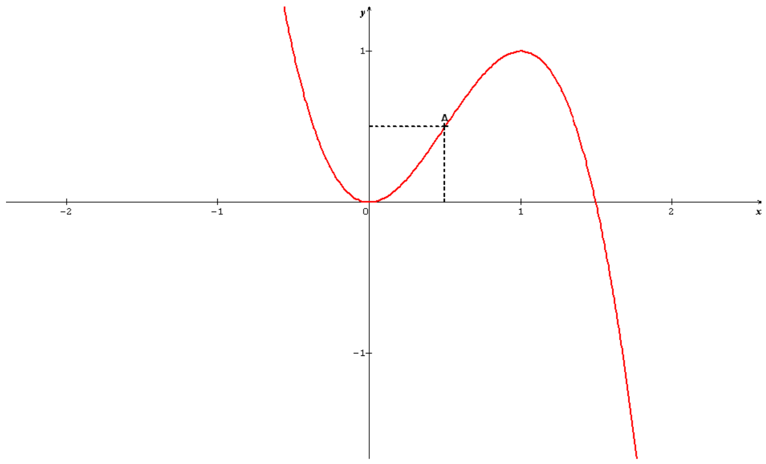

FIGURE 12.3 – Le graphe de la fonction $3x^2 - 3x^3$

(a) En effectuant le changement de variable $u = x + \frac{1}{2}$, montrer que

$$\int_{\frac{-1}{2}}^{\frac{1}{2}} f\left(3x^2 - 3x^3\right) dx = \int_0^{+1} f\left(3x^2 - 3x^3\right) dx$$

(b) Trouver le changement de variables adéquat pour montrer que

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} f\left(3x^2 - 3x^3\right) dx = \int_0^{+1} f\left(3x^2 - 3x^3\right) dx$$

3. Conclure que $\displaystyle\int_{\frac{-1}{2}}^{\frac{3}{2}} f\left(3x^2 - 3x^3\right) dx = 2\int_0^{+1} f\left(3x^2 - 3x^3\right) dx$

12.6.1 Exercices divers

Exercice 26 :

Soient f et g deux fonctions intégrables sur un intervalle $[a;b]$

1. Quel est le signe de $\displaystyle\int_a^b (f(t) + \lambda g(t))^2 \, dt$ où λ désigne un nombre réel ?
2. En déduire l'inégalité *(appelée inégalité de Schwarz)*

$$\left(\int_a^b f(t)\, g(t)\, dt\right)^2 \leq \left(\int_a^b (f(t))^2\, dt\right)\left(\int_a^b (g(t))^2\, dt\right)$$

qui peut encore être écrit :

$$\left|\int_a^b f(t)\, g(t)\, dt\right| \leq \sqrt{\left(\int_a^b (f(t))^2\, dt\right)\left(\int_a^b (g(t))^2\, dt\right)}$$

(Développer $\displaystyle\int_a^b (f(t) + \lambda g(t))^2 \, dt$ *et considérer cette expression comme un trinôme du second degré en* λ*)*

Exercice 27 :

Seconde formule de la moyenne
Soient a et b 2 nombres réels tels que $a < b$; on appelle $m = \inf\limits_{x\in[a;b]} f(x)$ et $M = \sup\limits_{x\in[a;b]} f(x)$ où $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ est une fonction continue
Soit $g : [a;b] \to \mathbb{R}$ une fonction positive et intégrable.

1. Montrer que $F : [a;b] \to \mathbb{R}$ définie par : $F(x) = f(x)\displaystyle\int_a^b g(t)\,dt$ est continue, et trouver ses extrema en fonction de m et M
2. Montrer que nous avons $m\displaystyle\int_a^b g(t)\,dt \leq \int_a^b f(t)\,g(t)\,dt \leq M\int_a^b g(t)\,dt$
3. En déduire qu'il existe $c \in [a;b]$ tel que $\displaystyle\int_a^b f(t)\,g(t)\,dt = f(c)\int_a^b g(t)\,dt$

Exercice 28 :

1. Pour $x \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$, calculer $F(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{dt}{(\cos t)^4}$
2. Calculer, pour $x \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ l'intégrale $I(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{t}{(\cos t)^4}dt$

Exercice 29 :

Pour $n \in \mathbb{N}$, et $\lambda \geq 1$ réel, on pose $I_n(\lambda) = \displaystyle\int_0^1 x^{\lambda-1}(1-x)^n\,dx$

1. En intégrant par parties, montrer que $I_n(\lambda) = \dfrac{n}{\lambda}I_{n-1}(\lambda+1)$
2. En déduire que $I_n(\lambda) = \dfrac{n!}{\prod\limits_{j=0}^{n}(\lambda+j)}$
3. Montrer que nous avons aussi $I_n(\lambda) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\,\mathrm{C}_n^k\frac{1}{\lambda+k}$

Exercice 30 :

Pour $x > 0$ posons $F(x) = \displaystyle\int_x^1 \frac{\ln t}{(1+t)^2}dt$

1. Trouver A et B tels que $\dfrac{1}{t(t+1)} = \dfrac{A}{t} + \dfrac{B}{(t+1)}$
2. Montrer que $\lim\limits_{x\to 0^+} F(x) = -\ln 2$ *(Utiliser une intégration par parties pour calculer explicitement F)*

Exercice 31 :

1. Soit $G(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{\ln t}{t^2}dt$. Calculer explicitement G, puis donner $\lim\limits_{x\to+\infty} G(x)$
2. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, étudier $\lim\limits_{x\to+\infty} G_\alpha(x)$ où $G_\alpha(x) = \displaystyle\int_1^x t^\alpha \ln t\,dt$

Exercice 32 :

Soit une fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par : $g(x) = e^{-x^2}$

1. Etudier g et tracer sa représentation graphique
2. Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{-x^2} \leqslant 1$
3. Soit $G(x) = \displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\, dt$ (on ne cherchera pas à calculer G))
   (a) Montrer que G est dérivable en tout point de $\mathbb{R}$
   (b) Quel est le sens de variation de G ?
4. Etablir que, $(\forall x \in \mathbb{R}) \left(x \geqslant 1 \Rightarrow \displaystyle\int_1^x e^{-t^2}\, dt \leqslant \int_1^x e^{-t}\, dt \right)$
5. En déduire que la fonction G est bornée, et qu'elle admet une limite (qu'on ne calculera pas) lorsque x tend vers $+\infty$

Exercice 33 :

1. En faisant 2 intégrations par parties successives, calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{8}} e^{-2t} \cos 2t\, dt$
2. En calculant $I + J$ et $I - J$, donner une valeur aux intégrales suivantes :
   $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{8}} e^{-2t} (\cos t)^2\, dt$ et $J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{8}} e^{-2t} (\sin t)^2\, dt$

Exercice 34 :

Dans tout le problème, on appelle E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ en entier et à valeurs dans $\mathbb{R}$
A toute fonction $f \in E$, on fait correspondre la fonction $L(f) = g$ où g est définie par

$$g(x) = \int_x^{x+1} f(t)\, dt$$

1. (a) Montrer que pour tout $f \in E$, $L(f) = g$ est dérivable, et que

$$[L(f)]'(x) = g'(x) = f(x+1) - f(x)$$

   (b) Existe-t-il une fonction $f \in E$ telle que $|x| = \displaystyle\int_x^{x+1} f(t)\, dt$?
2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, et $C_\alpha(x) = \cos \alpha x$
   Calculer $L(C_\alpha)$, et trouver tous les $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que $L(C_\alpha) = \mathcal{O}$ *(application nulle)*
3. Soit $f \in E$
   (a) Montrer que $L(f) = g$ est une constante, si et seulement si f est périodique et de période 1 ; faire le lien avec la question précédente.
   (b) Montrer que si f est périodique et de période 1, alors $[L(f)](x) = g(x) = \displaystyle\int_0^1 f(t)\, dt$
4. Soit $s \in \mathbb{R}$ et f_s définie par $f_s(x) = e^{sx}$; on appelle

$$G = \{f \in E \text{ telle que } f = \lambda f_s \text{où } \lambda \in \mathbb{R}\}$$

   Montrer que si $f \in G$, alors $L(f) = g \in G$

Exercice 35 :

Calculez les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^1 e^{2t}\left(e^{2t}+1\right)^{1256}\,dt$
2. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2t}\cos t\,dt$

Exercice 36 :

Pour $t \in]0,1]$, on pose $\varphi(t) = \dfrac{t\ln t}{t^2-1}$ et $\psi_n(t) = t^{2n}\varphi(t)$

1. (a) Donner $\displaystyle\lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} \frac{t\ln t}{t^2-1}$

   (b) Donner $\displaystyle\lim_{t\to 1}\frac{\ln t}{t-1}$ *(utiliser le "rapport de dérivation")*

   (c) En déduire $\displaystyle\lim_{t\to 1}\frac{t\ln t}{t^2-1}$

2. (a) Montrer qu'en posant $\varphi(0)=0$ et $\varphi(1)=\dfrac{1}{2}$, on prolonge φ par continuité en $t=0$, et $t=1$

   (b) Donner alors $\psi_n(0)$ et $\psi_n(1)$,et montrer que $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{2n}\ln t}{t^2-1}\,dt$ est bien définie.

3. (a) Etudier les variations de φ sur $]0,1]$, et en déduire que pour tout $t\in]0,1]$, nous avons $0 \leqslant \varphi(t) \leqslant \dfrac{1}{2}$

   (b) En déduire que $0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{2(2n+1)}$

   (c) Donner $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n$

Exercice 37 :

L'objet de ce problème est d'étudier la fonction :

$$F(x) = \int_{e^{-x}}^{e^x} \sqrt{1+(\ln t)^2}\,dt$$

1. Démontrer que, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $F(x)$ est définie.
2. Etudier la parité de F
3. Démontrer que $F'(x) = \sqrt{1+x^2}\left(e^x+e^{-x}\right)$; en déduire les variations de F
4. <u>**Etude des limites**</u>

   (a) Démontrer que, pour tout $x \geqslant 0$,

   $$\int_1^{e^x}\ln t\,dt \leqslant \int_1^{e^x}\sqrt{1+(\ln t)^2}\,dt \leqslant F(x)$$

   (b) Calculer explicitement $\displaystyle\int_1^{e^x}\ln t\,dt$, et en déduire $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}F(x)$

   (c) Donner $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}F(x)$

   (d) Donner $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{F(x)}{x}$

5. Dresser le tableau de variations de F, puis donner une "allure " de la représentation graphique de F

Exercice 38 :

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère les intégrales I_n et J_n, définies par :

$$I_n = \int_0^1 \left(1 - t^2\right)^{\frac{n}{2}} \, dt \qquad J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin u)^n \, du$$

1. En faisant le changement de variables $t = \cos u$, démontrez que $I_n = J_{n+1}$
2. Démontrez que nous avons $0 \leqslant J_{n+1} \leqslant J_n$
3. (a) Montrer que nous avons $J_n = J_{n-2} - \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin u)^{n-2} \cos^2 u \, du$

   (b) On appelle $K_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin u)^{n-2} \cos^2 u \, du$; en intégrant par parties, montrez que $K_n = \dfrac{1}{n-1} J_n$

   (c) En déduire que $J_n = \dfrac{n-1}{n} J_{n-2}$ et que $I_n = \dfrac{n}{n+1} I_{n-2}$
4. (a) En déduire que $I_{2p} = \dfrac{\left(2^p \times p!\right)^2}{(2p+1)!}$

   (b) En déduire que $I_{2p+1} = \dfrac{(2p+2)!}{\left(2^{p+1}\,(p+1)!\right)^2} \dfrac{\pi}{2}$

   (c) En déduire que $\lim\limits_{n \to +\infty} n I_n I_{n-1} = \dfrac{\pi}{2}$