12.7 Intégrales et évaluation d'aires

Lorsqu'on parlera <u>*d'aire*</u>*, nous entendrons un* ***nombre positif****. Nous pouvons aussi être amenés à considérer 2 types d'aires :*

— *L'aire algébrique qui est un nombre qui a un signe (positif ou négatif)*

— *L'aire géométrique qui est toujours positive*

12.7.1 Théorème

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a;b]$ avec $a<b$. Alors
L'aire de l'ensemble des points $M(x,y)$ tels que $a \leqslant x \leqslant b$ et $0 \leqslant y \leqslant f(x)$ est donné par :

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

Démonstration

Nous admettons ce théorème

Exemple 7 :

Soit $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ définie par $f(x)=e^x$. L'aire de l'ensemble

$$\{M(x,y) \text{ tels que } -1 \leqslant x \leqslant +1 \text{ et } 0 \leqslant y \leqslant e^x\}$$

est donnée par $\displaystyle\int_{-1}^{1} e^x\,dx = [e^x]_{-1}^{+1} = e - e^{-1}$

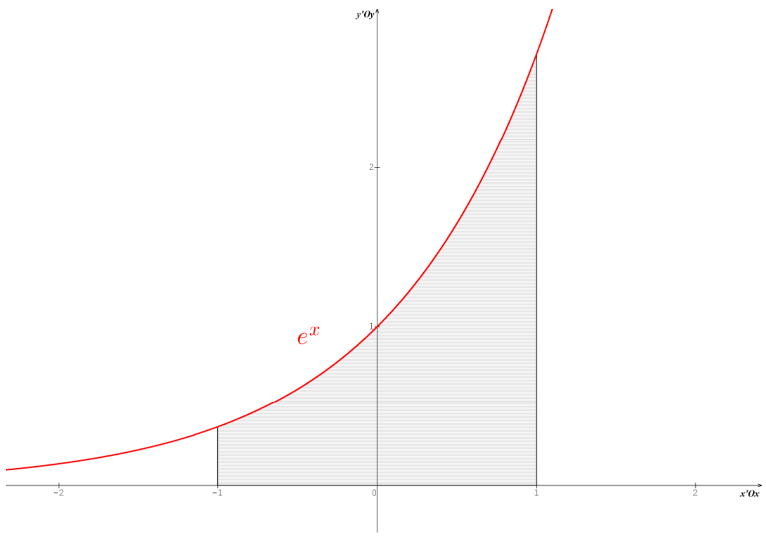

FIGURE 12.4 – Une représentation de l'ensemble dont on a calculé l'aire

12.7.2 Théorème

Soit f une fonction continue et négative sur un intervalle $[a;b]$ avec $a<b$. Alors
L'aire de l'ensemble des points $M(x,y)$ tels que $a \leqslant x \leqslant b$ et $f(x) \leqslant y \leqslant 0$ est donné par :

$$\int_a^b -f(x)\,dx$$

Démonstration

Nous admettons ce théorème

Exemple 8 :

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2 - x$. L'aire de l'ensemble

$$\{M(x,y) \text{ tels que } 0 \leqslant x \leqslant +1 \text{ et } f(x) \leqslant y \leqslant 0\}$$

est donnée par $\displaystyle\int_0^1 -\left(x^2 - x\right)\,dx = I_0^1 x - x^2\,dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^{+1} = \frac{1}{6}$

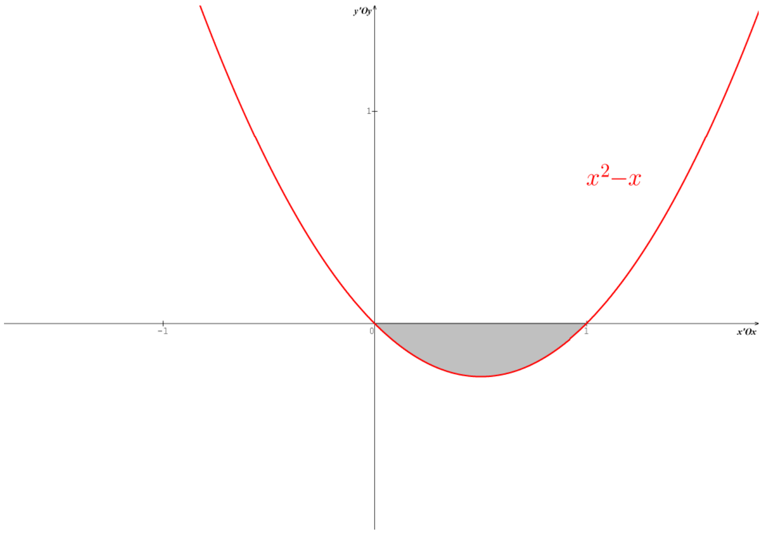

FIGURE 12.5 – Une représentation de l'ensemble dont on a calculé l'aire

12.7.3 Synthèse

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$ avec $a < b$. Alors
L'aire de l'ensemble des points $M(x,y)$ tels que $a \leqslant x \leqslant b$ et $f(x) \leqslant y \leqslant 0$ ou $0 \leqslant y \leqslant f(x)$ est donné par :

$$\int_a^b |f(x)|\,dx$$

Exemple 9 :

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \cos x$. L'aire de l'ensemble

$$\{M(x,y) \text{ tels que } 0 \leqslant x \leqslant \pi \text{ et } f(x) \leqslant y \leqslant 0 \text{ ou } 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}$$

est donnée par

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi |\cos x|\,dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos x|\,dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi |\cos x|\,dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi -\cos x\,dx \\
&= [\sin t]_0^{\frac{\pi}{2}} - [\sin t]_{\frac{\pi}{2}}^\pi \\
&= 1 - (-1) = 2
\end{aligned}$$

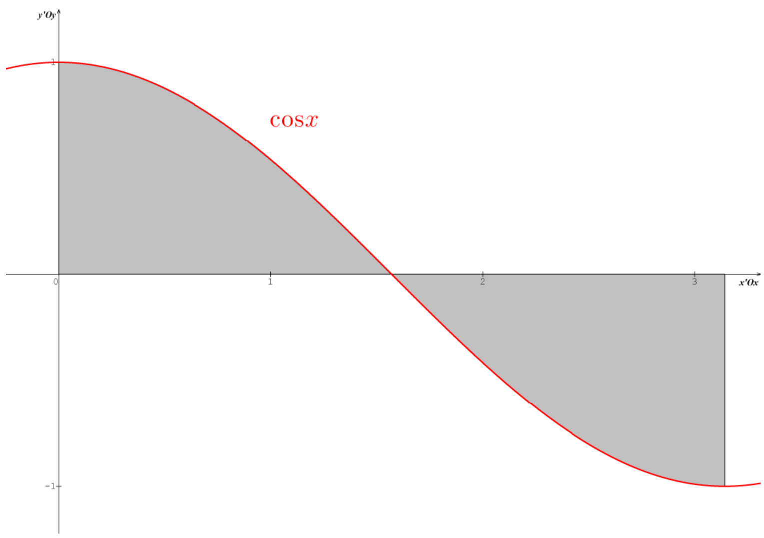

FIGURE 12.6 – Une représentation de la fonction $\cos x$ entre 0 et π et de l'ensemble dont on a calculé l'aire

Remarque 11 :

Le vocabulaire d'aire géométrique et d'aire algébrique prend ici tout son sens :

- ▷ L'aire géométrique est donc $\displaystyle\int_0^{\pi} |\cos x|\ dx == 2$
- ▷ L'air ealgébrique est donc $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos x\, dx = 0$

12.7.4 Application

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a;b]$ avec $a < b$.Supposons que pour tout $x \in [a;b]$, nous ayions $f(x) \leqslant g(x)$ Alors
L'aire de l'ensemble des points $M(x,y)$ tels que $a \leqslant x \leqslant b$ et $f(x) \leqslant y \leqslant g(x)$ est donné par :

$$\int_a^b (g(x) - f(x))\, dx$$

Remarque 12 :

On peut aussi écrire que cette aire est donnée par $\displaystyle\int_a^b |g(x) - f(x)|\, dx$

Exemple 10 :

Soient $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2 - x$ et $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x) = -x^2 + 2x$. Nous avons :

$$f(x) \leqslant g(x) \Longleftrightarrow x^2 - x \leqslant -x^2 + 2x \Longleftrightarrow 2x^2 - 3x \leqslant 0 \Longleftrightarrow x \in \left[0; \frac{3}{2}\right]$$

Ainsi, l'aire des points $M(x,y)$ tels que $0 \leqslant x \leqslant +1$ et $f(x) \leqslant y \leqslant g(x)$ est donnée par :

$$\int_0^1 (f(x) - g(x))\, dx = \int_0^1 \left(-2x^2 + 3x\right) dx = \frac{5}{6}$$

Par contre l'aire des points $M(x,y)$ tels que :

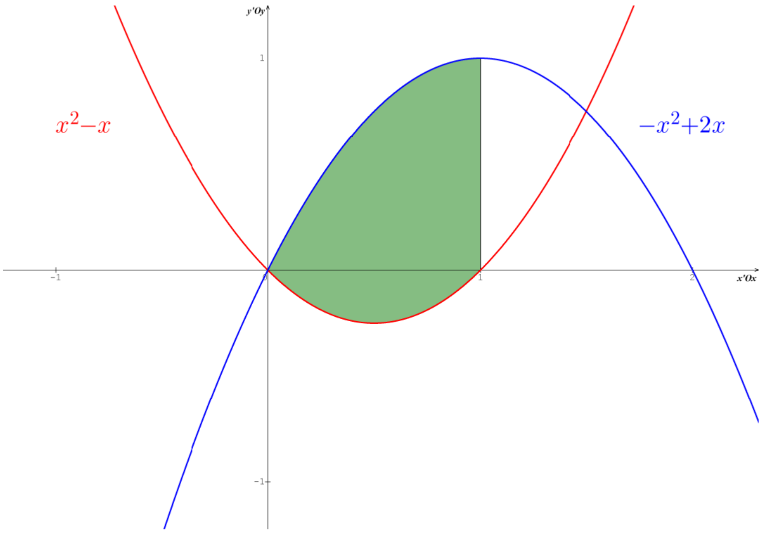

FIGURE 12.7 – Une représentation de l'aire des points $M(x, y)$ tels que $0 \leqslant x \leqslant +1$ et $f(x) \leqslant y \leqslant g(x)$

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \leqslant x \leqslant 2 \\ \text{et } f(x) \leqslant y \leqslant g(x) \\ \text{ou } g(x) \leqslant y \leqslant f(x) \end{array} \right.$$

est donnée par : $\displaystyle\int_0^2 |f(x) - g(x)|\, dx = \frac{19}{12}$

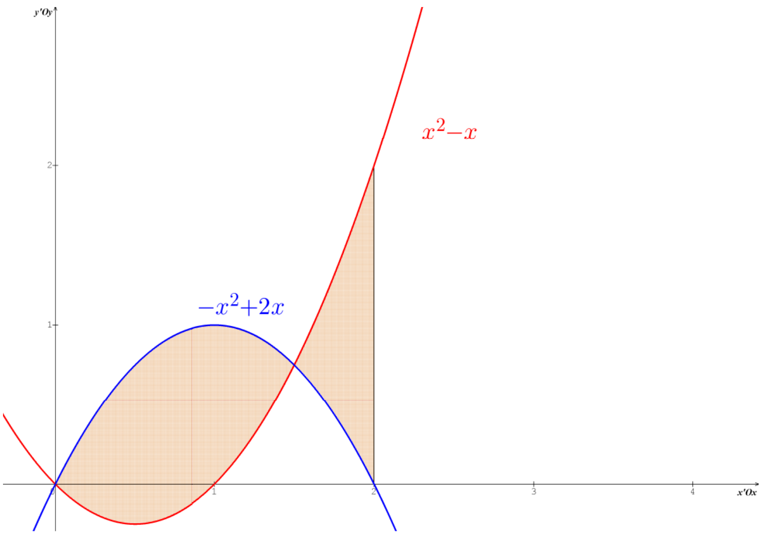

FIGURE 12.8 – Une représentation de l'aire géométrique entre les points $M(x, y)$ tels que $0 \leqslant x \leqslant +1$ et $f(x) \leqslant y \leqslant g(x)$ ou $g(x) \leqslant y \leqslant f(x)$

Exercice 39 :

On considère l'application f définie sue $\mathbb{R}^+$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ par :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = \left\{ \begin{array}{l} x^2 \ln x \text{ si } x > 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^+$; est-elle dérivable sur $\mathbb{R}^+$?
2. Etudier f et tracer sa courbe représentative (Γ) dans un repère orthonormé $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$
3. Soit $\alpha > 0$. Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_1^\alpha f(x)\,dx$
4. En déduire l'aire géométrique du domaine $\mathcal{D}$ défini par :

$$\mathcal{D} = \{0 \leqslant x \leqslant 1 \text{ et } f(x) \leqslant y \leqslant 0\}$$