12.8 Calculs approchés

Ce qui va vous être présenté ici s'approche de l'approximation par la ***méthode des rectangles****, qui sera approfondie en L_1. Ceci n'en est donc qu'une introduction*

12.8.1 Premiers exemples

1. **En comparant les puissances de x pour $x > 1$, encadrer $\ln 2$**

   Nous savons que $\ln 2 = \displaystyle\int_1^2 \frac{1}{t}\,dt$

   Pour $t \geqslant 1$, nous avons $\sqrt{t} \leqslant t \leqslant t^2$ et donc $\dfrac{1}{t^2} \leqslant \dfrac{1}{t} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ et donc, par la positivité de l'intégrale :

   $$\int_1^2 \frac{1}{t^2}\,dt \leqslant \int_1^2 \frac{1}{t}\,dt \leqslant \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt \iff [\frac{-1}{t}]_1^2 \leqslant \ln 2 [2\sqrt{t}]_1^2 \iff \frac{1}{2} \leqslant \ln 2 \leqslant 2\left(\sqrt{2}-1\right)$$

   C'est à dire $0,5 \leqslant \ln 2 \leqslant 0,82$

2. **En utilisant une méthode de rectangles, encadrer $\ln 2$**

   Nous partons toujours de $\ln 2 = \displaystyle\int_1^2 \frac{1}{t}\,dt$. Nous partageons le segment $[1;2]$ en 4 parties de longueur égale

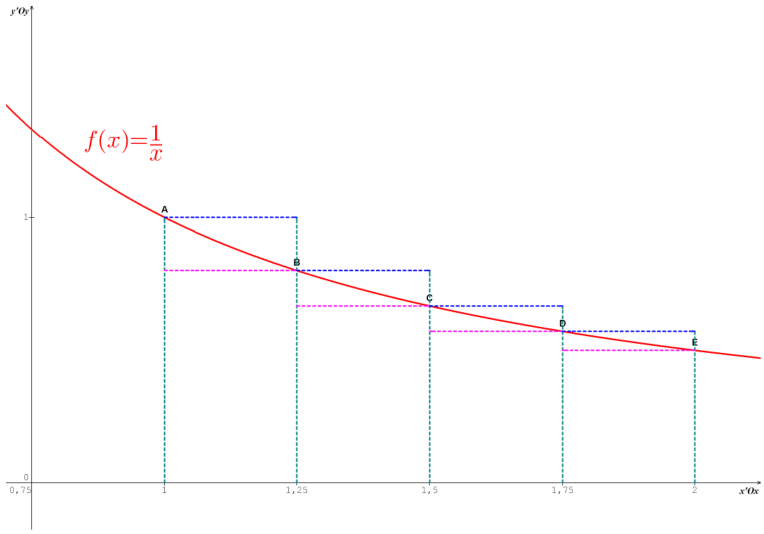

FIGURE 12.9 – Visualisation du graphe de $\dfrac{1}{t}$ sur l'intervalle $[1;2]$ et la subdivision de $[1;2]$ en 4 parties de longueur égale

   En faisant des condidération d'aires, nous avons :

   $$\frac{1}{1,25}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{1,5}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{1,75}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{4} < \int_1^2 \frac{1}{t}\,dt < 1\times\frac{1}{4}+\frac{1}{1,25}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{1,5}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{1,75}\times\frac{1}{4}$$

   C'est à dire $0,634 < \ln 2 < 0,759$

3. **Est-il possible d'obtenir un encadrement de $\ln 2$ aussi précis que nous le souhaitons ?**

   Nous allons réutiliser la méthode précédente en faisant n subdivisions de l'intervalle $[1;2]$ en n parties de longueur égale à $\dfrac{1}{n}$.

   Nous construisons donc une suite finie $(x_k)_{k=0,\ldots,n}$ telle que :

   $$x_0 = 1 \quad x_n = 2 \quad x_{k+1} - x_k = \frac{1}{n}$$

La suite finie $(x_k)_{k=0,\dots,n}$ est donc une suite arithmétique de raison $\frac{1}{n}$ et donc $x_k = x_0 + \frac{k}{n} = 1 + \frac{k}{n}$.
La fonction $f(x) = \frac{1}{x}$ est décroissante sur l'intervalle $[1;2]$, et donc, en particulier, pour tout k tel que $0 \leqslant k \leqslant n-1$, $f(x) = \frac{1}{x}$ est décroissante sur l'intervalle $[x_k; x_{k+1}]$.
Ainsi, pour tout $t \in [x_k; x_{k+1}]$, nous avons $\frac{1}{x_{k+1}} \leqslant \frac{1}{t} \leqslant \frac{1}{x_k}$, et donc, par la positivité de l'intégrale,

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{1}{x_{k+1}}\,dt \leqslant \int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{1}{t}\,dt \leqslant \int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{1}{x_k}\,dt$$

C'est à dire :

$$\frac{1}{x_{k+1}}(x_{k+1}-x_k) \leqslant \int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{1}{t}\,dt \leqslant \frac{1}{x_k}(x_{k+1}-x_k) \Longleftrightarrow \frac{1}{x_{k+1}} \times \frac{1}{n} \leqslant \int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{1}{t}\,dt \leqslant \frac{1}{x_k} \times \frac{1}{n}$$

En passant à la sommation, nous avons :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{x_{k+1}} \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{1}{t}\,dt \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{x_k}$$

Comme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{1}{t}\,dt = \int_1^2 \frac{1}{t}\,dt = \ln 2$, nous obtenons donc :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{x_{k+1}} \leqslant \ln 2 \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{x_k}$$

Nous avons $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{x_{k+1}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{x_k} + \frac{1}{2} - 1 = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{x_k} - \frac{1}{2}$, de telle sorte que nous obtenons l'inégalité :

$$\frac{1}{n}\left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{x_k} - \frac{1}{2}\right) \leqslant \ln 2 \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{x_k}$$

Et donc

$$0 \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{x_k} - \ln 2 \leqslant \frac{1}{2n} \Longleftrightarrow 0 \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{1+\frac{k}{n}} - \ln 2 \leqslant \frac{1}{2n} \Longleftrightarrow 0 \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n+k} - \ln 2 \leqslant \frac{1}{2n}$$

Ce qui montre que l'on peut approcher $\ln 2$ de manière aussi proche que l'on souhaite :
- ▷ A 10^{-2} près, c'est à dire si $\frac{1}{2n} \leqslant 10^{-2}$ et donc $n \geqslant 50$, nous obtenons $\ln 2 \approx 0,588$
- ▷ A 10^{-3} près, c'est à dire si $\frac{1}{2n} \leqslant 10^{-3}$ et donc $n \geqslant 500$, nous obtenons $\ln 2 \approx 0,6926$

Remarque 13 :

L'idée intéressante, serait de généraliser cette situation pour toute fonction. C'est très difficile ; nous nous restreignons au cas où f est dérivable et de dérivée bornée.

12.8.2 Théorème des sommes de Riemann

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$, dérivable sur $[a;b]$ telle que, il existe $M > 0$ tel que, pour tout $x \in [a;b]$, nous avons $|f'(x)| < M$
Soit $\{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n\}$ une suite finie de points de l'intervalle $[a;b]$ qui partagent l'intervalle $[a;b]$ en n subdivisions de longueur égale, c'est à dire telles que :

Pour tout $k = 0, 1, \cdots, n$, nous avons $x_k < x_{k+1}$ et $x_k = a + \dfrac{k(b-a)}{n}$

Alors $S_n^1 = \dfrac{(b-a)}{n} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(x_k)$ et $S_n^2 = \dfrac{(b-a)}{n} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1})$ sont des valeurs approchées de $\displaystyle\int_a^b f(t)\, dt$ à $M\dfrac{(b-a)^2}{n}$ près

Autrement dit : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n^1 = \lim_{n\to+\infty} S_n^2 = \int_a^b f(t)\, dt$

Démonstration

Cette démonstration est assez typique de ce qui se fait en mathématiques : on pose le problème général, puis, nous imposons des conditions *(c'est à dire que nous restreignons les possibilités)* qui doivent nous conduire au résultat.

1. **Tout d'abord, nous construisons une subdivision quelconque de l'intervalle $[a; b]$**
   - C'est à dire, qu'en particulier, les subdivisions ne sont pas de longueur égale.
     Soit donc $\{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n\}$ une suite finie de points de l'intervalle $[a; b]$ tels que $x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ telle que $x_0 = a$ et $x_n = b$
     On appelle $m_k = \displaystyle\inf_{x\in[x_k;x_{k+1}]} f(x)$ et $M_k = \displaystyle\sup_{x\in[x_k;x_{k+1}]} f(x)$
     f étant continue sur $[a; b]$ l'est, en particulier sur les intervalles $[x_k; x_{k+1}] \subset [a; b]$, et donc la borne inférieure m_k existe tout comme la borne supérieure M_k.
     f continue sur $[x_k; x_{k+1}]$ et bornée et atteint ses bornes ; nous pouvons donc écrire qu'il existe $c_k \in [x_k; x_{k+1}]$ tel que $f(c_k) = m_k$ et qu'il existe $d_k \in [x_k; x_{k+1}]$ tel que $f(d_k) = M_k$
   - Maintenant, sur l'intervalle $[x_k; x_{k+1}]$, nous avons :
     $$\int_{x_k}^{x_{k+1}} m_k\, dt \leqslant \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\, dt \leqslant \int_{x_k}^{x_{k+1}} M_k\, dt$$
     C'est à dire :
     $$m_k(x_{k+1} - x_k) \leqslant \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\, dt \leqslant M_k(x_{k+1} - x_k)$$
     Et en passant à la sommation :
     $$\sum_{k=0}^{n-1} m_k(x_{k+1} - x_k) \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\, dt \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} M_k(x_{k+1} - x_k)$$
     Or, nous avons, par la relation de Chasles : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\, dt = \int_a^b f(t)\, dt$, et donc, en conclusion :
     $$\sum_{k=0}^{n-1} m_k(x_{k+1} - x_k) \leqslant \int_a^b f(t)\, dt \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} M_k(x_{k+1} - x_k)$$
   - Nous appelons $T_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)(x_{k+1} - x_k)$ *(Remarquez l'analogie avec S_n^1 et S_n^2)*
     Alors :
     $$\begin{gathered} \sum_{k=0}^{n-1} m_k(x_{k+1} - x_k) - T_n \leqslant \int_a^b f(t)\, dt - T_n \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} M_k(x_{k+1} - x_k) - T_n \\ \Longleftrightarrow \\ \sum_{k=0}^{n-1} (m_k - f(x_k))(x_{k+1} - x_k) \leqslant \int_a^b f(t)\, dt - T_n \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} (M_k - f(x_k))(x_{k+1} - x_k) \end{gathered} \tag{12.1}$$

2. **Prenons, maintenant, le cas particulier où la subdivision divise l'intervalle $[a;b]$ en n parties de longueur égale à $\dfrac{b-a}{n}$**

   Alors, dans ce cas, $T_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)(x_{k+1}-x_k) = \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\left(\frac{b-a}{n}\right) = \left(\frac{b-a}{n}\right)\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) = S_n^2$

   Les inégalités (12.1) deviennent :

   $$\left(\frac{b-a}{n}\right)\sum_{k=0}^{n-1}(m_k - f(x_k)) \leqslant \int_a^b f(t)\ dt - S_n^2 \leqslant \left(\frac{b-a}{n}\right)\sum_{k=0}^{n-1}(M_k - f(x_k))$$

   C'est à dire

   $$\left(\frac{b-a}{n}\right)\sum_{k=0}^{n-1}(f(c_k) - f(x_k)) \leqslant \int_a^b f(t)\ dt - S_n^2 \leqslant \left(\frac{b-a}{n}\right)\sum_{k=0}^{n-1}(f(d_k) - f(x_k))$$

   Et donc, nous avons, en remarquant que $m_k = f(c_k) \leqslant f(x_k) \leqslant M_k = f(d_k)$

   $$\left|\int_a^b f(t)\ dt - S_n^2\right| \leqslant \left(\frac{b-a}{n}\right)\sup\left\{\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) - f(c_k)\,;\sum_{k=0}^{n-1} f(d_k) - f(x_k)\right\}$$

3. **Suposons maintenant f dérivable et que il existe $M>0$ tel que, pour tout $x\in[a;b]$ nous avons $|f'(x)|<M$**

   D'après le théorème des accroissements finis, et surtout sa conséquence, l'inégalité des accroissements finis,nous avons :

   $$(\forall x\in[a;b])\,(\forall y\in[a;b])\,(|f(x)-f(y)| \leqslant M\,|x-y|)$$

   Donc, pour tout $k = 0,\cdots,n-1$,

   $$|f(c_k) - f(x_k)| = f(x_k) - f(c_k) \leqslant M\,|x_k - c_k| \leqslant M\,(x_{k+1}-x_k)$$

   Donc :
   - ▷ $f(x_k) - f(c_k) \leqslant M\dfrac{b-a}{n}$
   - ▷ Et, de même, $f(d_k) - f(x_k) \leqslant M\dfrac{b-a}{n}$

   Ainsi, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(f(x_k)-f(c_k)) \leqslant \sum_{k=0}^{n-1}\left(M\frac{b-a}{n}\right) = M\,(b-a)$, et, de même, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(f(d_k)-f(x_k)) \leqslant M\,(b-a)$ et donc, $\sup\left\{\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)-f(c_k)\,;\sum_{k=0}^{n-1} f(d_k)-f(x_k)\right\} \leqslant M\,(b-a)$, ce qui montre que :

   $$\left|\int_a^b f(t)\ dt - S_n^2\right| \leqslant M\left(\frac{(b-a)^2}{n}\right)$$

   Et donc, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n^2 = \int_a^b f(t)\ dt$

On démontrerait de même que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n^1 = \int_a^b f(t)\ dt$

Exemple 11 :

Evaluer $\ln 1,1$

Remarquons, pour commencer, que $\ln 1,1 = \ln\dfrac{11}{10} = \ln 11 - \ln 10 = \displaystyle\int_{10}^{11}\frac{dt}{t}$

D'après ce qui vient d'être montré, nous avons : $\ln 1,1 = \lim_{n\to+\infty} \frac{11-10}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(10+\frac{k}{n}\right)$, c'est à dire :

$$\ln 1,1 = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{10+\frac{k}{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{n}{10n+k} = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{10n+k}$$

Lorsque nous calculons jusqu'à l'ordre n, l'approximation sera faite avec une incertitude d'ordre $\frac{M}{n}$ où M est un majorant de la dérivée sur l'intervalle $[10;11]$. Or, comme la dérivée de $\frac{1}{t}$ est $\frac{-1}{t^2}$, nous avons $M = \frac{1}{100}$

Ainsi, pour $n = 10$, $\sum_{k=0}^{9} \frac{1}{100+k}$ est une valeur approchée de $\ln 1,1$ à 10^{-3} près. Nous avons $\ln 1,1 \approx 0,095$

Exercice 40 :

1. Justifier l'existence de l'intégrale $I = \int_0^1 xe^{-x}\,dx$
2. Calculer I
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose : $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} e^{\frac{-k}{n}}$. Etudier $\lim_{n\to+\infty} S_n$

12.8.3 Utilisation d'intégrales pour étudier la convergence de suites

L'utilisation d'intégrales pour prouver qu'une suite est convergente ou non est fréquente en analyse.

1. **Nous allons montrer que la suite $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ est divergente**

   Nous allons toujours utiliser la méthode des rectangles ainsi que la décroissance de la fonction $\frac{1}{x}$ lorsque $x \geqslant +1$ *(Voir figure 12.10)*

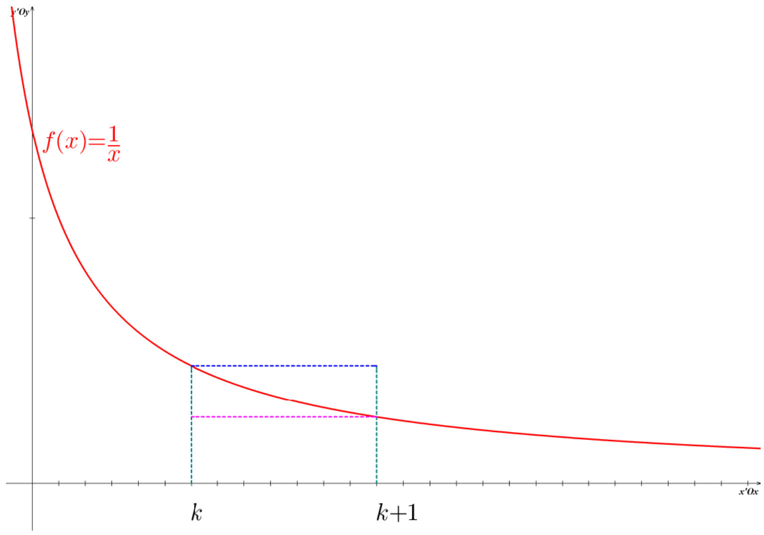

FIGURE 12.10 – Visualisation du graphe de $\frac{1}{t}$ sur l'intervalle $[k;k+1]$

Nous avons $\ln n = \int_1^n \frac{dx}{x} = \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{dx}{x}$

Comme $\frac{1}{x}$ est décroissante sur $[k; k+1]$, nous avons, pour tout $x \in [k; k+1]$, $\frac{1}{k+1} \leqslant \frac{1}{x} \leqslant \frac{1}{k}$, et, par des considérations d'aires et de positivité de l'intégrale :

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{k+1}\,dx \leqslant \int_k^{k+1} \frac{dx}{x} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{k}\,dx \Longleftrightarrow \frac{1}{k+1} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{dx}{x} \leqslant \frac{1}{k}$$

En passant à la sommation, nous avons :

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{dx}{x} \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \Longleftrightarrow \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \leqslant \ln n \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$$

$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} + \frac{1}{n}$

Nous avons donc $\ln n \leqslant H_n - \frac{1}{n} \Longleftrightarrow \ln n + \frac{1}{n} \leqslant H_n$

Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \ln n + \frac{1}{n} = +\infty$, nous déduisons que $\lim\limits_{n \to +\infty} H_n = +\infty$.

La suite $(H_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est donc divergente

2. **Nous allons montrer que la suite $R_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ est convergente**

   - Il est clair que la suite $(R_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante.

     En effet, $R_{n+1} - R_n = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$

   - Montrons que la suite $(R_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est majorée

     Nous allons toujours utiliser la méthode des rectangles ainsi que la décroissance de la fonction $\frac{1}{x^2}$ lorsque $x \geqslant +1$

     Nous avons $\int_1^n \frac{dx}{x^2} = \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{dx}{x^2}$

     Comme $\frac{1}{x^2}$ est décroissante sur $[k; k+1]$, nous avons, pour tout $x \in [k; k+1]$

$$\frac{1}{(k+1)^2} \leqslant \frac{1}{x^2} \leqslant \frac{1}{k^2}$$

     Par des considérations d'aires et de positivité de l'intégrale :

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{(k+1)^2}\,dx \leqslant \int_k^{k+1} \frac{dx}{x^2} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{k^2}\,dx \Longleftrightarrow \frac{1}{(k+1)^2} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{dx}{x^2} \leqslant \frac{1}{k^2}$$

     En passant à la sommation, nous avons :

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(k+1)^2} \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{dx}{x^2} \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^2} \Longleftrightarrow \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(k+1)^2} \leqslant \int_1^n \frac{dx}{x^2} \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^2}$$

     Or, $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(k+1)^2} = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} = R_n - 1$

     Nous avons donc $R_n - 1 \leqslant \int_1^n \frac{dx}{x^2} \Longleftrightarrow R_n \leqslant \int_1^n \frac{dx}{x^2} + 1$

     Comme $\int_1^n \frac{dx}{x^2} = \left[\frac{-1}{t}\right]_1^n = 1 - \frac{1}{n}$, nous avons $R_n \leqslant 2 - \frac{1}{n} \leqslant 2$

     La suite $(R_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est donc majorée

La suite $(R_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ étant croissante et majorée est donc convergente.

Un autre problème est d'en calculer la limite