12.9 Problèmes

Exercice 41 :

Sur la constante d'Euler

Que se passe-t-il lorsque nous additionnons 2 suites divergentes ? Eh bien, nous n'en savons rien ! ! Nous avons montré dans le cours que la suite $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ *est divergente. Qu'en est-il du comportement de la suite* $u_n = H_n - \ln n$ *; le problème suivant tente d'y répondre.*

Soit $(u_n)_{n\geqslant 2}$ la suite de terme général :

$$u_n = H_n - \ln n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n$$

1. Montrer, à l'aide de la méthode des rectangles, que, pour tout $n \geqslant 2$, nous avons :

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} < \int_1^n \frac{dt}{t} < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n-1}$$

2. En déduire que pour tout $n \geqslant 2$, nous avons $0 < u_n < 1$, puis que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{H_n}{\ln n} = 1$
3. (a) Démontrer que pour tout $n \geqslant 2$, $\frac{1}{n+1} < \int_n^{n+1} \frac{dt}{t} < \frac{1}{n}$
   (b) En déduire que la suite $(u_n)_{n\geqslant 2}$ est décroissante et converge vers un nombre $\gamma \in [0;+1]$ appelé **constante d'Euler**
4. (a) Soit $(v_n)_{n\geqslant 2}$ la suite définie par $v_n = u_n - \frac{1}{n}$. démontrer que les suites $(v_n)_{n\geqslant 2}$ et $(u_n)_{n\geqslant 2}$ sont adjacentes
   (b) En déduire que pour tout $n \geqslant 2$, nous avons $0 \leqslant u_n - \gamma \leqslant \frac{1}{n}$
5. Quelle valeur faut-il donner à n pour être sûr d'avoir une valeur approchée par excès de γ à 10^{-1} près
6. A l'aide d'un programme Python, donner cette valeur approchée.

Exercice 42 :

Dans ce problème, on s'intéresse à l'exponentielle définie comme limite d'une suite et non plus comme fonction inverse de la fonction logarithme

1. En utilisant une intégration par parties, démontrez que

$$\int_0^a te^t\,dt = ae^a - \int_0^a e^t\,dt$$

   En déduire que $e^a = 1 + a + \int_0^a (a-t)\,e^t\,dt$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$; nous posons $I_n = \int_0^a \frac{(a-t)^n}{n\,!} e^t\,dt$. Démontrez que :

$$I_n = \frac{a^{n+1}}{(n+1)\,!} + I_{n+1}$$

3. Démontrez par récurrence que, pour tout $n \geqslant 1$

$$e^a = 1 + a + \frac{a^2}{2\,!} + \cdots + \frac{a^n}{n\,!} + I_n$$

4. Démontrez que $0 \leqslant |I_n| \leqslant \left|\dfrac{a^n}{n\,!}\left(e^a - 1\right)\right|$
5. Nous posons $u_n = \dfrac{a^n}{n\,!}$. Calculez $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right|$ et montrez qu'il existe un entier $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier n tel que si $n \geqslant n_0$ alors $|u_{n+1}| \leqslant \dfrac{1}{2}|u_n|$
6. En déduire que si $n \in \mathbb{N}$ et $n \geqslant n_0$, alors $0 \leqslant |u_n| \leqslant |u_{n_0}| \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-n_0}$
7. En déduire :
   (a) Les limites de u_n et I_n lorsque n tend vers $+\infty$
   (b) Montrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1 + a + \dfrac{a^2}{2\,!} + \cdots + \dfrac{a^n}{n\,!}\right) = e^a$

Exercice 43 :

Fonction ζ de Rieman

Nous avons montré que la suite $H_n = \sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}$ était divergente alors que la suite $R_n = \sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k^2}$ était convergente. Qu'en est-il des suites $\zeta_n(s) = \sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k^s}$ où $s \in \mathbb{R}^{*+} \setminus \{+1\}$? Les questions suivantes y répondent.

Soit s un réel strictement positif et différent de 1. On considère la suite $\left(\zeta_n(s)\right)_{n\geqslant 1}$ dont le terme général est donné par :

$$\zeta_n(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \cdots + \frac{1}{n^s} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^s}$$

1. Etudier les variations de la fonction $f(x) = \dfrac{1}{x^s}$ pour $x > 0$
2. Utiliser la méthode des rectangles pour démontrer que pour $n \geqslant 2$:
$$\zeta_n(s) - 1 \leqslant \int_1^n \frac{dx}{x^s} \leqslant \zeta_{n-1}(s)$$
3. Calculer $\displaystyle\int_1^n \frac{dx}{x^s}$
4. On suppose que $0 < s < 1$. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty}\zeta_n(s) = +\infty$
5. On suppose que $s > 1$. Montrer que la suite $\left(\zeta_n(s)\right)_{n\geqslant 1}$ est bornée. En déduire qu'elle converge.

Nous venons de montrer que :
- ▷ *Si $0 < s \leqslant 1$, la suite $\left(\zeta_n(s)\right)_{n\geqslant 1}$ diverge*
- ▷ *Si $s > 1$, la suite $\left(\zeta_n(s)\right)_{n\geqslant 1}$ converge*

Pour $s > 1$, la limite de $\zeta_n(s)$ est notée $\zeta(s)$. La fonction numérique $\zeta(s) = \lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k^s}$ s'appelle ***fonction ζ de Riemann***

Exercice 44 :

On vient de montrer que si $s > 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k^s}$ existe ; mais savons nous la calculer ? Le problème suivant calcule $\zeta(2)$ avec des moyens très rustiques. Une méthode plus rapide et tout autant rigoureuse sera vue dans le cours de L_2

1. Démontrer que si f est continuement dérivable *(f est de classe $\mathcal{C}^1$)*, alors :
$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f(t)\sin nt\,dt = 0 \text{ et } \lim_{n\to+\infty}\int_a^b f(t)\cos nt\,dt = 0$$

2. Calculer $\sum_{k=1}^{n} \cos kt$
3. Montrer que la fonction $g(t) = \left(t - \frac{t^2}{2\pi}\right) \cot\left(\frac{t}{2}\right)$ est bornée sur $[0;\pi]$
4. Trouver 2 réel a et b tels que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:
$$\int_0^\pi \left(at + bt^2\right) \cos kt\, dt = \frac{1}{k^2}$$
5. Ecrire $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ sous forme d'intégrale et démontrer que $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$

Nous avons donc $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$

Exercice 45 :

Le problème suivant s'intéresse à une approximation de l'intégrale $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x} dx$ *en démontrant qu'elle est la limite de la suite* $(u_n)_{n\geqslant 2}$ *de terme général*

$$u_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2} = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{(-1)^{k-1}}{k^2} + \cdots + \frac{(-1)^{n-2}}{(n-1)^2}$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$. On appelle Q_{n-2} la fonction polynômiale de la variable réelle t donnée par :
$$Q_{n-2}(t) = 1 - t + t^2 - t^3 + \cdots + (-1)^{n-2} t^{n-2}$$
   (a) Démontrer que, pour tout $t \neq -1$, $Q_{n-2}(t) = \frac{1 - (-1)^{n-1} t^{n-1}}{1+t}$

   (b) En déduire que :
$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + \cdots + (-1)^{n-2} t^{n-2} + (-1)^{n-1} \frac{t^{n-1}}{1+t} = Q_{n-2}(t) + (-1)^{n-1} \frac{t^{n-1}}{1+t}$$
   (c) Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $0 \leqslant x \leqslant 1$. Démontrer que :
$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-2} \frac{x^{n-1}}{n-1} + (-1)^{n-1} \int_0^x \frac{t^{n-1}}{1+t} dt \qquad (12.2)$$
   Pour simplifier, nous poserons
$$P_{n-1}(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-2} \frac{x^{n-1}}{n-1}$$
2. (a) On considère la fonction $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$ définie pour $x > 0$; démontrer que l'on peut prolonger f par continuité en $x = 0$ et qu'il est alors possible de calculer $\int_0^1 f(x)\, dx$

   (b) On considère, maintenant $\theta(x) = \ln(1+x) - x$. En étudiant les variations de θ, démontrer que, pour tout $x \geqslant 0$, nous avons $0 \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$

   (c) En déduire que, pour tout $x \in [0;1]$, nous avons $0 < f(x) \leqslant 1$

   (d) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant \int_0^{\frac{1}{n}} f(x)\, dx \leqslant \frac{1}{n}$

(e) En déduire que $\lim\limits_{n \to +\infty} \displaystyle\int_{\frac{1}{n}}^{1} f(x)\ dx = \int_0^1 f(x)\ dx$

3. (a) Démontrer que, pour tout $x \in [0;1]$, nous avons $\displaystyle\int_0^x \frac{t^{n-1}}{1+t}\, dt \leqslant \int_0^x t^{n-1}\, dt$

(b) En déduire que, pour tout $x \in [0;1]$, nous avons $\displaystyle\int_0^x \frac{t^{n-1}}{1+t}\, dt \leqslant \frac{1}{n}$

(c) En utilisant la relation 12.2 démontrer que, pour tout $x \in [0;1]$, nous avons

$$\frac{-1}{nx} \leqslant f(x) - \frac{P_{n-1}(x)}{x} \leqslant \frac{1}{nx}$$

(d) En intégrant sur le segment $\left[\frac{1}{n};1\right]$, établir la relation :

$$\int_{\frac{1}{n}}^{1} f(x)\ dx - \frac{1}{n}\ln n + S_n\left(\frac{1}{n}\right) \leqslant S_n(1) \leqslant \int_{\frac{1}{n}}^{1} f(x)\ dx + \frac{1}{n}\ln n + S_n\left(\frac{1}{n}\right) \tag{12.3}$$

Où nous avons posé, pour $n \geqslant 2$,

$$S_n(x) = x - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{3^2} - \frac{x^4}{4^2} + \cdots + (-1)^{n-2}\,\frac{x^{n-1}}{(n-1)^2} = \sum_{k=2}^{n} (-1)^{k-2}\,\frac{x^{k-1}}{(k-1)^2}$$

(e) Démontrer que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0;1]$, nous avons $\dfrac{x^{p+1}}{(p+1)^2} \leqslant \dfrac{x^p}{p^2}$

(f) Démontrer que pour tout $n \geqslant 2$ et tout $x \in [0;1]$, nous avons $0 \leqslant S_n(x)$

On pourra écrire $S_1(x)$, $S_2(x) = \left(x - \dfrac{x^2}{2^2}\right)$, $S_3(x) = \left(x - \dfrac{x^2}{2^2}\right) + \dfrac{x^3}{3^2}$, $S_4(x) = \left(x - \dfrac{x^2}{2^2}\right) + \left(\dfrac{x^3}{3^2} - \dfrac{x^4}{4^2}\right)$, etc...

(g) Démontrer que pour tout $n \geqslant 2$ et tout $x \in [0;1]$, nous avons $S_n(x) \leqslant x$

(h) En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n\left(\dfrac{1}{n}\right)$

(i) Déduire des résultats précédents que $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n\,(frm[o]--) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}\, dx$

4. Nous avons $S_n(1) = 1 - \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} - \dfrac{1}{4^2} + \cdots + (-1)^{n-2}\,\dfrac{1}{(n-1)^2} = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} (-1)^{k-2}\,\frac{1}{(k-1)^2}$

(a) Démontrer que, pour tout $n \geqslant 5$, nous avons :

$$1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} \leqslant S_n(1) \leqslant 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2}$$

(b) En déduire un encadrement de $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}\, dx$