Chapitre 11

Savoir étudier une courbe

L'étude d'une courbes est une question récurrente des programmes de Terminale ; elle a été parfois l'unique sujet d'un problème de bac. La conclusion de cette question était presque toujours ***la représentation de cette fonction****. Cette représentation se faisait « à la main » ; nous avions ainsi une belle idée du comportement de la fonction.*
Or, dans tous les cas, cette représentation ne pouvait être qu'approximative ; l'apparition des calculatrices graphiques, puis des logiciels « traceurs de courbes » a largement simplifié le travail mais n'en a pas, pour autant, gommé l'approximation ! !
Pour ma part, je ne crie pas sur l'utilisation de ces logiciels qui, objectivement, simplifient la vie des étudiants. Mais, j'insiste sur la nécessité absolue de « l'étude de la fonction » ; cette étude permet de comprendre le comportement de cette fonction, en un point précis ou encore à l'infini. Donc, d'abord l'étude de la fonction, puis la représentation graphique. ***Jamais l'inverse ! !***
Etudier une fonction ne s'improvise pas, et une bonne étude suit un plan logique. C'est ce que nous allons essayer de présenter ci-après

11.1 Plan d'étude d'une fonction

11.1.1 Détermination de l'ensemble de définition

C'est le plus souvent un intervalle, une réunion d'intervalles

11.1.2 Etude de la continuité

Etude de la continuité et du domaine de continuité qui, le plus souvent, est inclus dans le domaine de définition.

11.1.3 Etude des limites

Etude des limites aux bornes de chacun des intervalles composant le domaine de définition.

11.1.4 Asymptotes

Détermination, s'il y a lieu des asymptotes, et position du graphe par rapport à ces asymptotes.

11.1.5 Dérivabilité

1. **Domaine de dérivabilité :** Etude du domaine de dérivabilité
2. **Calcul de dérivée :** Calcul de la dérivée et détermination du signe de la dérivée
3. **Etude aux bornes :** Etude de la dérivabilité aux bornes de chacun des intervalles composant le domaine de dérivabilité.

11.1.6 Etude des points singuliers

Etude des points singuliers : points d'inflexion, maxima, minima

11.1.7 Etablissement du tableau de variations

Le tableau de variations est la synthèse de tous les calculs

11.1.8 Construction du graphe

Construction du graphe à la main ou sur machine.
Attention : un graphe est toujours approximatif, et n'est jamais très précis ; il y a toujours des approxximations. S'il faut le faire le mieux possible, il y aura toujours des erreurs.

11.2 Etude des branches infinies

11.2.1 Définition

On dit que f, et par extension sa représentation graphique, admet une branche infinie en $x_0 \in \mathcal{D}_f$ si :

- **x_0 est infini**
- **Ou bien x_0 est fini et la limite de f en x_0 est infinie.**

Exercice 1 :

Etudier les branches infinies de $f(u) = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}$ et de $g(x) = \dfrac{x^2}{x^2-1}$

11.2.2 Définition

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction numérique de domaine de définition $\mathcal{D}_f$ tel que $\mathcal{D}_f$ contienne un intervalle du type $[a +\infty[$ ou $]-\infty\, a]$.
Soit Γ sa courbe représentative ; on dit que la droite Δ d'équation $y = ax + b$ est asymptote à Γ si :

$$\lim_{|x| \to +\infty} (f(x) - (ax+b)) = 0$$

Remarque 1 :

Plus généralement :
2 fonctions f et g sont asymptotes au voisinage de l'infini, si $\lim\limits_{|x| \to +\infty} (f(x) - g(x)) = 0$

Exercice 2 :

Soit $\mathcal{C}$ la représentation graphique dans un repère $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ de la fonction f.
Démontrez, dans les cas suivants, que $\mathcal{C}$ est asymptote à une parabole $\mathcal{P}$:

1. $f(x) = -\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{5}{4x}$
2. $f(x) = -2x^2 + e^{-|x|}$
3. $f(x) = -\dfrac{x^4-1}{x^2+2}$

11.2.3 Comment trouver des droites asymptotes ?

1. **Si $x_0 \in \mathbb{R}$ et x_0 fini**

$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} = \pm\infty$	La droite $x = x_0$ est asymptote à droite
$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} = \pm\infty$	La droite $x = x_0$ est asymptote à gauche

2. **Si $x_0 \in \mathbb{R}$ est infini : $x_0 = \pm\infty$**

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}$ n'existe pas		Il n'y a pas de direction asymptotique
$\lim\limits_{x\to\pm\infty} = \pm\infty$		Nous avons une branche parabolique de direction Oy
$\lim\limits_{x\to\pm\infty} = a$ où a est fini		Nous avons une direction asymptotique de coefficient directeur a
	$\lim\limits_{x\to\pm\infty} (f(x) - ax) = b$	La droite Δ d'équation $y = ax + b$ est asymptote à la courbe représentative de f
	$\lim\limits_{x\to\pm\infty} (f(x) - ax) = \pm\infty$	Nous avons une branche parabolique dans la direction de la droite $y = ax$
	$\lim\limits_{x\to\pm\infty} (f(x) - ax)$ n'existe pas	Nous avons une direction asymptotique, sans asymptote ni branche parabolique

Exercice 3 :

Recherchez les éventuelles asymptotes des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x + 1}{x}$
2. $f(x) = x - \sqrt{x}$
3. $f(x) = x + \sin x$
4. $f(x) = x \sin x$

11.3 Un exemple d'étude de fonction

Etude et représentation de la fonction $f(x) = x\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$

11.3.1 Domaine de définition

De manière évidente, f est définie pour $x \neq -1$ et $\dfrac{x-1}{x+1} \geqslant 0$, c'est à dire que

$$\mathcal{D}_f =]-\infty\ -1[\cup [+1\ +\infty[$$

11.3.2 Domaine de continuité

f est continue sur $\mathcal{D}_f$ comme composée et produit de fonctions continues sur $\mathcal{D}_f$

11.3.3 Domaine de dérivabilité

Le seul problème concernant la dérivabilité concerne le point où la racine carrée s'annule ; ainsi, à priori, $\mathcal{D}_{f'} =]-\infty\ -1[\cup]+1\ +\infty[$; il restera à étudier la dérivabilité en $x = +1$; il faut remarquer que $f(1) = 0$

11.3.4 Etude des limites

1. **Etude en ∞**
   (a) Etude en $+\infty$

Pour $x \neq 0$, on écrit différemment f :

$$\begin{aligned} f(x) = & \; x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \\ = & \; x\sqrt{\frac{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}} \\ = & \; x\sqrt{\frac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}} \end{aligned}$$

Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$, nous avons $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{\dfrac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}} = 1$, et donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

(b) <u>Etude en $-\infty$</u>
L'étude en $-\infty$ n'est pas moins difficile et est identique en ce qui concerne les factorisations ou autres. Nous avons donc : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

2. **Etude en $x = -1$**
Nous devons donc étudier $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} f(x)$. Il est assez facile de vérifier que $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} \dfrac{x-1}{x+1} = +\infty$, et donc que $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} x\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}} = -\infty$

11.3.5 Etude des branches infinies

La courbe représentative de f admet 3 branches infinies en $x_0 = -1$, en $+\infty$ et en $-\infty$. En $x_0 = -1$, elle admet la droite $x_0 = -1$ comme asymptote.

<u>**Recherche des asymptotes en ∞**</u>

1. Pour trouver les asymptotes, nous calculons $\dfrac{f(x)}{x}$, puis nous en cherchons la limite en ∞ de $\dfrac{f(x)}{x}$.
Or, $\dfrac{f(x)}{x} = \sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$, donc, $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \sqrt{\dfrac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}} = 1$.
Il y a donc une direction asymptotique de coefficient directeur 1
2. Etudions maintenant $f(x) - x$. Nous avons

$$\begin{aligned} f(x) - x = & \; x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} - x \\ = & \; x\left(\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} - 1\right) \\ = & \; x\left(\frac{\left(\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} - 1\right)\left(\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} + 1\right)}{\left(\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} + 1\right)}\right) \\ = & \; x\left(\frac{\left(\frac{x-1}{x+1} - 1\right)}{\left(\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} + 1\right)}\right) \\ = & \; x\left(\frac{(x-1-(x+1))}{(x+1)\left(\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} + 1\right)}\right) \\ = & \; x\left(\frac{-2}{(x+1)\left(\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} + 1\right)}\right) \end{aligned}$$

Donc $f(x) - x = \dfrac{-2x}{(x+1)\left(\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}+1\right)}$

3. Or, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{-2x}{(x+1)} = -2$ et $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{1}{\left(\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}+1\right)} = \dfrac{1}{2}$, ainsi, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) - x = -1$
4. Au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$, Γ, la courbe représentative de f admet pour asymptote, la droite Δ d'équation $y = x - 1$

11.3.6 Etude de la dérivabilité

Posons $\alpha(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$, pour $x \neq +1$; nous avons alors $f(x) = x\sqrt{\alpha(x)}$. Le choix de $x \neq +1$ n'est pas anodin puisque $\alpha(1) = 0$ et la fonction $\sqrt{x}$ n'est pas dérivable en $x = 0$. Nous aurons donc à étudier la dérivabilité en $x = +1$

1. **Calcul de la dérivée sur** $]-\infty\ -1[\cup]+1\ +\infty[$
   Nous avons donc $f(x) = x\sqrt{\alpha(x)}$, d'où le calcul de $f'(x)$ nous donne :
$$f'(x) = \sqrt{\alpha(x)} + x\frac{\alpha'(x)}{2\sqrt{\alpha(x)}}$$
   Or, $\alpha'(x) = \dfrac{2}{(x+1)^2}$, donc
$$\begin{aligned} f'(x) &= \sqrt{\alpha(x)} + x\frac{\alpha'(x)}{2\sqrt{\alpha(x)}} \\ &= \sqrt{\alpha(x)} + \frac{x}{(x+1)^2\sqrt{\alpha(x)}} \\ &= \frac{\alpha(x)(x+1)^2 + x}{(x+1)^2\sqrt{\alpha(x)}} \\ &= \frac{\frac{x-1}{x+1}(x+1)^2 + x}{(x+1)^2\sqrt{\alpha(x)}} \\ &= \frac{(x-1)(x+1) + x}{(x+1)^2\sqrt{\alpha(x)}} \\ &= \frac{x^2 + x - 1}{(x+1)^2\sqrt{\alpha(x)}} \end{aligned}$$
2. **Signe de la dérivée**
   Comme $(x+1)^2$ et $\sqrt{\alpha(x)}$ sont strictement positifs, le signe de la dérivée ne dépend que de celui de $x^2 + x - 1$ qui est un polynôme du second degré dont nous connaissons facilement les racines $x_0 = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$ et $x_1 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ or, $x_0 \cong -1,618$ et $x_1 \cong 0,618$; nous avons $x_0 \in \mathcal{D}_f$ et $x_1 \notin \mathcal{D}_f$; en x_0, la dérivée s'annule en changeant de signe ; c'est donc un extrémum ; nous avons un extremum en $M\left(\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}, \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\sqrt{2+\sqrt{5}}\right)$, c'est à dire, après calcul, en $M(-1,62, -3,33)$

11.3.7 Tableau de variations

Le tableau de variations représente donc la synthèse de l'étude.

x	$-\infty$		$x_0 = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$		-1		$+1$			$+\infty$
$f'(x)$		$++$	0	$--$	$\Vert$	non définie	$\Vert$		$++$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow\nearrow$	M	$\searrow\searrow$	$\Vert$	non définie	$\vert\ 0$	$\nearrow$	$\nearrow$	∞

11.3.8 Points singuliers

Le point $A(1,0)$ est un point d'arrêt, et il est évidemment intéressant d'y étudier la dérivée :

$$\begin{aligned}
\lim_{\substack{x\to+1\\x>1}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} &= \lim_{\substack{x\to+1\\x>1}} x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\times\frac{1}{x-1} \\
&= \lim_{\substack{x\to+1\\x>1}} x\sqrt{\frac{1}{x^2-1}} \\
&= +\infty
\end{aligned}$$

La fonction admet donc une tangente verticale à gauche.

11.3.9 Position par rapport à l'asymptote

Nous faisons donc la différence $f(x)-(x-1)$,
Position par rapport à l'asymptote pour $x>1$

$$\begin{aligned}
f(x)-(x-1) &= x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}-(x-1) \\
&= \sqrt{x-1}\left(\frac{x}{\sqrt{x+1}}-\sqrt{x-1}\right) \\
&= \sqrt{x-1}\left(\frac{x-\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x+1}}\right)
\end{aligned}$$

Le signe de cette quantité ne dépend que de celui de $x-\sqrt{x^2-1}$; or, pour $|x|\geqslant 1$, $\sqrt{x^2-1}<\sqrt{x^2}=|x|$, ce qui veut dire que si $x>1$, alors $x-\sqrt{x^2-1}>0$, et le graphe est au-dessus de l'asymptote
Position par rapport à l'asymptote pour $x<-1$

$$\begin{aligned}
f(x)-(x-1) &= x\sqrt{-\frac{1-x}{x+1}}+(1-x) \\
&= \sqrt{1-x}\left(\frac{x}{\sqrt{-x-1}}+\sqrt{1-x}\right) \\
&= \sqrt{1-x}\left(\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{-x-1}}\right)
\end{aligned}$$

Le signe de cette quantité ne dépend que de celui de $x+\sqrt{x^2-1}$; or, pour $|x|\geqslant 1$, $\sqrt{x^2-1}<\sqrt{x^2}=|x|$, ce qui veut dire que si $x<-1$, alors $x+\sqrt{x^2-1}<0$, et le graphe est au-dessous de l'asymptote

11.4 Graphe

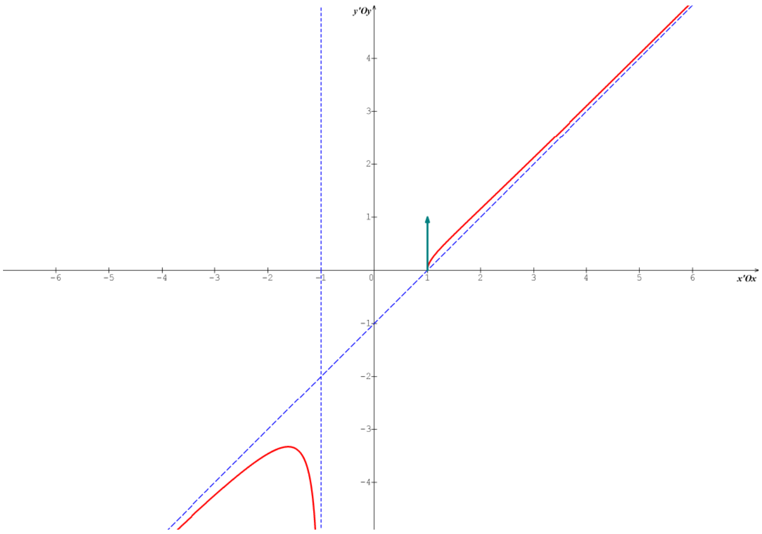

FIGURE 11.1 – Le graphe représentatif de f

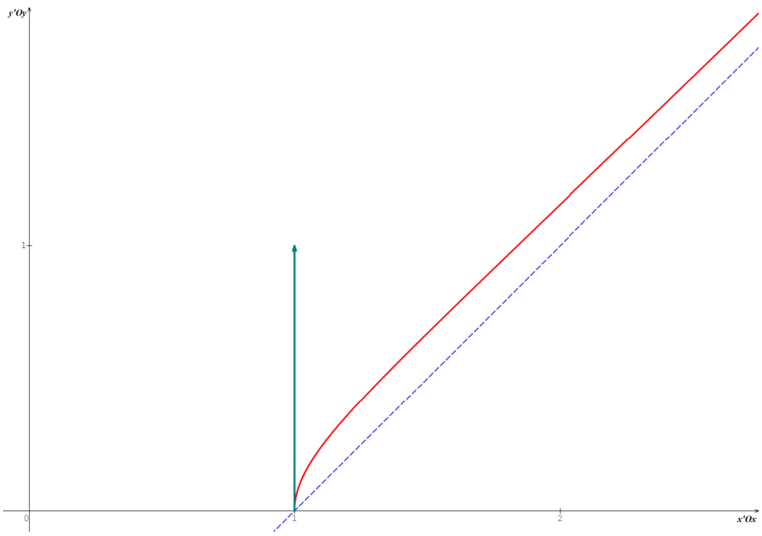

FIGURE 11.2 – Un agrandissement au voisinage de $x = 1$