Chapitre 15

Le groupe orthogonal

Dans ce chapitre, nous ne nous intéresserons qu'aux $\mathbb{R}$-espace vectoriel , dans le but de réellement maîtriser ce qui se passe au niveau des réels. les définitions ou théorèmes seront parfois énoncés dans un cadre de dimension quelconque ; la plupart du temps, nous serons en dimension finie

15.1 Produit scalaire

15.1.1 Définition de produit scalaire

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel .
Une application $\Phi : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} E \times E \longrightarrow \mathbb{R} \\ \quad (x, y) \quad \longmapsto \quad \Phi\left[(x, y)\right] = \langle x/y \rangle \end{cases}$$

est appelée produit scalaire si elle vérifie les propriétés suivantes :

1. **Elle est bilinéaire**
   C'est à dire que pour tout $x \in E$, tout $y \in E$ et tout $z \in E$, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et tout $\mu \in \mathbb{R}$:

$$\Phi\left[(\lambda x + \mu y, z)\right] = \lambda \Phi\left[(x, z)\right] + \mu \Phi\left[(y, z)\right] \Longleftrightarrow \langle \lambda x + \mu y/z \rangle = \lambda \langle x/z \rangle + \mu \langle y/z \rangle$$

   Et

$$\Phi\left[(x, \lambda y + \mu z)\right] = \lambda \Phi\left[(x, y)\right] + \mu \Phi\left[(x, z)\right] \Longleftrightarrow \langle x/\lambda y + \mu z \rangle = \lambda \langle x/y \rangle + \mu \langle x/z \rangle$$

2. **Elle est symétrique**
   C'est à dire que pour tout $x \in E$ et tout $y \in E$:

$$\Phi\left[(x, y)\right] = \Phi\left[(y, x)\right] \Longleftrightarrow \langle x/y \rangle = \langle y/x \rangle$$

3. **Elle est positive**
   C'est à dire que pour tout $x \in E$:

$$\Phi\left[(x, x)\right] \geqslant 0 \Longleftrightarrow \langle x/x \rangle \geqslant 0$$

4. **Elle est « définie »**
   C'est à dire que pour tout $x \in E$:

$$\Phi\left[(x, x)\right] = 0 \Longleftrightarrow x = \overrightarrow{0} \Longleftrightarrow \langle x/x \rangle = 0 \Longleftrightarrow x = \overrightarrow{0}$$

Un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E muni d'un produit scalaire est appelé espace euclidien

Remarque 1 :

1. Φ étant bilinéaire, nous avons toujours, et pour tout $x \in E$, $\Phi\left[\left(x, \overrightarrow{0}\right)\right] = \Phi\left[\left(\overrightarrow{0}, x\right)\right] = 0$

   En effet, pour tout $x \in E$, nous avons $\Phi\left[\left(x, \overrightarrow{0}\right)\right] = \Phi\left[(x, y-y)\right] = \Phi\left[(x,y)\right] - \Phi\left[(x,y)\right] = 0$
2. Donc, pour tout $x \in E$, nous avons $\left\langle x/\overrightarrow{0}\right\rangle = \left\langle \overrightarrow{0}/x\right\rangle = 0$
3. Pour le produit scalaire, nous utiliserons toujours la notation $\langle u/v\rangle$

Exemple 1 :

Dans $\mathbb{R}^2$, pour $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ l'application $\Phi\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right) = xx_1 + yy_1$ est un produit scalaire. On l'appelle souvent le produit scalaire canonique

Exercice 1 :

Dans $\mathbb{R}^2$, on considère la fonction, définie, pour $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ par :

$$\Phi\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right) = (x+y)(x_1+y_1) + 2yy_1$$

Est-ce un produit scalaire ?

Exercice 2 :

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$.
On considère, dans $\mathbb{R}^2$, pour $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ l'application Φ définie par :

$$\Phi\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right) = xx_1e^{a^2} + (xy_1 + x_1y)e^{ab} + yy_1e^{b^2}$$

Démontrer que Φ est un produit scalaire

15.1.2 Définition de norme

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel .
On appelle norme sur E une application $\|\bullet\|$ de E dans $\mathbb{R}^+$:

$$\left\{\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ x & \longmapsto & \|x\| \end{array}\right.$$

qui admet les propriétés suivantes :

1. **Pour tout $v \in E$, $(\|v\| = 0) \Longleftrightarrow \left(v = \overrightarrow{0}\right)$**
2. **Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et tout $v \in E$, nous avons : $\|\lambda v\| = |\lambda|\,\|v\|$**
3. **Inégalité triangulaire :**

$$(\forall u \in E)\,(\forall v \in E)\,(\|u+v\| \leqslant \|v\| + \|v\|)$$

15.1.3 Lemme de Schwarz

Soir E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien.
Nous notons $\mathcal{N}(x) = \sqrt{\langle x/x\rangle}$
Alors, pour tout $x \in E$ et tout $y \in E$, nous avons :

$$|\langle x/y\rangle| \leqslant \mathcal{N}(x)\,\mathcal{N}(y)$$

Nous avons $|\langle x/y\rangle| = \mathcal{N}(x)\,\mathcal{N}(y)$ si et seulement si, x et y sont linéairement indépendants

Démonstration

1. Tout d'abord, $\mathcal{N}(x) = \sqrt{\langle x/x \rangle}$ est bien défini, puisque, pour tout $x \in E$, $\langle x/x \rangle \geqslant 0$
2. Soient $x \in E$ et $y \in E$
   Considérons, maintenant, l'application φ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, définie, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, par
   $$\varphi(\lambda) = (\mathcal{N}(x+\lambda y))^2 = \langle x+\lambda y / x+\lambda y \rangle$$
   - A priori, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, nous avons $\varphi(\lambda) \geqslant 0$ puisque $_varphi$ est définie par un carré.
   - Ecrivons différemment $(\mathcal{N}(x+\lambda y))^2$:
   $$\begin{aligned}(\mathcal{N}(x+\lambda y))^2 &= \langle x+\lambda y / x+\lambda y \rangle \\ &= \langle x/x \rangle + \lambda \langle x/y \rangle + \lambda \langle y/x \rangle + \lambda^2 \langle y/y \rangle \\ &= \langle x/x \rangle + 2\lambda \langle x/y \rangle + \lambda^2 \langle y/y \rangle \\ &= \mathcal{N}^2(x) + 2\lambda \langle x/y \rangle + \lambda^2 \mathcal{N}^2(y)\end{aligned}$$
   $\varphi(\lambda)$ apparaît donc comme un polynôme du second degré, à coefficients réels, toujours positif ou nul de disriminant Δ négatif ou nul
   - Donc, comme $\Delta = (\langle x/y \rangle)^2 - \mathcal{N}^2(x)\mathcal{N}^2(y)$, de $\Delta \leqslant 0$, nous tirons :
   $$(\langle x/y \rangle)^2 \leqslant \mathcal{N}^2(x)\mathcal{N}^2(y) \Longleftrightarrow |\langle x/y \rangle| \leqslant \mathcal{N}(x)\mathcal{N}(y)$$
3. De $\Delta = 0$, nous tirons $|\langle x/y \rangle| = \mathcal{N}(x)\mathcal{N}(y)$ et il existe $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ tel que $\varphi(\lambda_0) = 0$.
   Dès lors, nous avons :
   $$\mathcal{N}(x+\lambda_0 y) = \sqrt{\langle x+\lambda_0 y / x+\lambda_0 y \rangle} = 0 \Longleftrightarrow \langle x+\lambda_0 y / x+\lambda_0 y \rangle = 0 \Longrightarrow x+\lambda_0 y = 0$$
   Ce qui signifie que x et y sont colinéaires *(ou dépendants)*
   Réciproquement, si x et y sont colinéaires, et que donc $x = \mu y$ avec $\mu \in \mathbb{R}$, alors :
   $$|\langle x/y \rangle| = |\langle \mu y/y \rangle| = |\mu| \, |\langle y/y \rangle| = |\mu| \, \mathcal{N}^2(y) = |\mu| \, \mathcal{N}(y) \times \mathcal{N}(y)$$
   Il faut maintenant remarquer que
   $$\mathcal{N}(x) = \mathcal{N}(\mu y) = \sqrt{\langle \mu y / \mu y \rangle} = \sqrt{\mu^2 \langle y/y \rangle} = |\mu| \sqrt{\langle y/y \rangle} = |\mu| \, \mathcal{N}(y)$$
   Et donc $\mathcal{N}(x)\mathcal{N}(y) = |\mu| \, \mathcal{N}(y)\mathcal{N}(y) = |\langle x/y \rangle|$

15.1.4 Théorème

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien.
Alors, l'application $\mathcal{N}$ définie pour tout $x \in E$ par $\mathcal{N}(x) = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ est une norme appelée norme euclidienne.
Désormais, nous noterons cette norme : $\mathcal{N}(x) = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \|x\|$

Démonstration

Nous allons donc vérifier que la fonction $\mathcal{N}$ vérifie les axiômes de norme

1. Dans un premier temps, pour tout $x \in E$, $\mathcal{N}(x) = \sqrt{\langle x, x \rangle} \geqslant 0$
2. D'autre part, et clairement,$\mathcal{N}(x) = 0 \Longleftrightarrow \langle x/x \rangle = 0 \Longleftrightarrow x = \overrightarrow{0}$
3. Ensuite, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\mathcal{N}(\lambda x) = \sqrt{\langle \lambda x / \lambda x \rangle} = \sqrt{\lambda^2 \langle x/x \rangle} = |\lambda| \sqrt{\langle x/x \rangle} = |\lambda| \, \mathcal{N}(x)$
4. Montrons l'inégalité triangulaire
   Soient $x \in E$ et $y \in E$. On s'intéresse à $\mathcal{N}^2(x+y)$.
   $$\begin{aligned}\mathcal{N}^2(x+y) &= \langle x+y / x+y \rangle \\ &= \langle x/x \rangle + \langle x/y \rangle + \langle y/x \rangle + \langle y/y \rangle \\ &= \mathcal{N}^2(x) + 2\langle x/y \rangle + \mathcal{N}^2(y)\end{aligned}$$
   D'après le lemme de Schwarz 15.1.3 nous avons $2\langle x/y \rangle \leqslant \mathcal{N}(x)\mathcal{N}(y)$ et donc :
   $$\mathcal{N}^2(x+y) \leqslant \mathcal{N}^2(x) + 2\mathcal{N}(x)\mathcal{N}(y) + \mathcal{N}^2(y) = (\mathcal{N}(x) + \mathcal{N}(y))^2$$
   De $\mathcal{N}^2(x+y) \leqslant (\mathcal{N}(x) + \mathcal{N}(y))^2$, nous déduisons $\mathcal{N}(x+y) \leqslant \mathcal{N}(x) + \mathcal{N}(y)$
   L'inégalité triangulaire est donc démontrée, et $\mathcal{N}$ est une norme

Remarque 2 :

Remarque importante : Le lemme de Schwarz 15.1.3 s'écrit alors :

$$\boxed{|\langle x/y\rangle| \leqslant \|x\| \, \|y\|}$$

15.1.5 Orthogonalité

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien

1. **Deux vecteurs $x \in E$ et $y \in E$ sont dits orthogonaux si et seulement si $\langle x/y\rangle = 0$. Dans ce cas, on note souvent $x \perp y$**
2. **Soit F un sous-espace vectoriel de E et $x \in E$. On dit que le vecteur x est orthogonal à F, si et seulement si, pour tout $y \in F$, $\langle x/y\rangle = 0$**
3. **Soient F et G 2 sous-espace vectoriels de E. On dit que F et G sont orthogonaux, et on note alors $F \perp G$, si et seulement si, pourtout $x \in F$ et tout $y \in E$, $\langle x/y\rangle = 0$**

15.1.6 Proposition

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien et $X \subset E$, un sous-ensemble de E. On appelle $X^\perp$ l'ensemble des vecteurs de E qui sont orthogonaux à tous les vecteurs de X, c'est à dire :

$$X^\perp = \{y \in E \text{ tels que pour tout } x \in X \text{ nous ayions } \langle x/y\rangle = 0\}$$

Alors $X^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E

Démonstration

- Tout d'abord $X^\perp \neq \emptyset$ puisque $\overrightarrow{0} \in X^\perp$; en effet, pour tout $x \in X$ nous avons $\left\langle x/\overrightarrow{0}\right\rangle = 0$
- Soient $y \in X^\perp$, $y_1 \in X^\perp$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\mu \in \mathbb{R}$. Nous allons montrer que $\lambda y + \mu y_1 \in X^\perp$
  Soit $x \in X$; alors $\langle x/y\rangle = \langle x/y_1\rangle = 0$ et :
  $$\langle x/\lambda y + \mu y_1\rangle = \lambda \langle x/y\rangle + \mu \langle x/y_1\rangle = 0$$
  Donc $\lambda y + \mu y_1 \in X^\perp$

Et $X^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E

Remarque 3 :

C'est tout aussi vrai si $X = \{x\}$ où $x \neq \overrightarrow{0}$; X n'est pas un sous-espace vectoriel , mais $X^\perp$ est le sous-espace vectoriel de E de tous les vecteurs de E qui sont orthogonaux à x

Exercice 3 :

Démontrer que si Δ est la droite vectorielle engendrée par x, alors $\{x\}^\perp = \Delta^\perp$

15.1.7 Le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$

Dans $\mathbb{R}^n$, on introduit le produit scalaire canonique :

Pour tout $u = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ et $v = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, le produit scalaire canonique est donné par :

$$\langle u/v\rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k = u^T v$$

Remarque 4 :

1. Il est facile de démontrer que $\langle u/v\rangle = u^T v = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k y_k$ est bien un produit scalaire
2. Dans $\mathbb{R}^3$, si $u = (x, y, z)$ et $v = (x_1, y_1, z_1)$
   (a) $\langle u/v\rangle = xx_1 + yy_1 + zz_1$
   (b) $u \perp v \iff \langle u/v\rangle = 0 \iff xx_1 + yy_1 + zz_1 = 0$
   (c) $\|u\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
   (d) Si $i = (1, 0, 0)$, $j = (0, 1, 0)$ et $k = (0, 0, 1)$, nous avons :
   $$\|i\| = \|j\| = \|k\| = 1 \text{ et } \langle i/j\rangle = \langle i/k\rangle = \langle k/j\rangle = 0$$

Exercice 4 :

1. Dans le plan $\mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire canonique,
   (a) Quel est l'ensemble des vecteurs qui sont orthogonaux au vecteur $u = \begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$
   (b) De manière générale, quel est l'ensemble des vecteurs qui sont orthogonaux au vecteur $u = \begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$
2. Dans l'espace $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique,
   (a) Quel est l'ensemble des vecteurs qui sont orthogonaux au vecteur $u = \begin{pmatrix}-1\\2\\6\end{pmatrix}$
   (b) De manière générale, quel est l'ensemble des vecteurs qui sont orthogonaux au vecteur $u = \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$

15.1.8 Identité du parallélogramme

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien ; alors, pour tout $x \in E$ et tout $y \in E$, nous avons :

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)$$

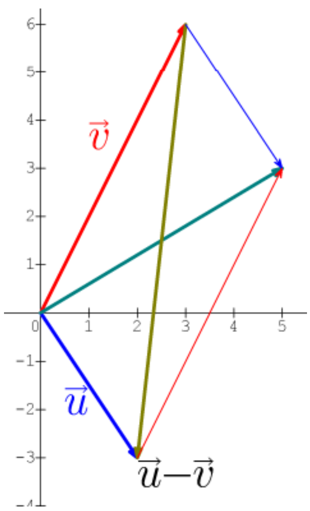

FIGURE 15.1 – Une visualisation de l'identité du parallélogramme

Démonstration

Soient $x \in E$ et $y \in E$; alors :

- ▷ $\|x+y\|^2 = \langle x+y/x+y\rangle = \langle x/x\rangle + 2\langle x/y\rangle + \langle y/y\rangle$
- ▷ De même $\|x-y\|^2 = \langle x-y/x-y\rangle = \langle x/x\rangle - 2\langle x/y\rangle + \langle y/y\rangle$

En additionnant, nous obtenons $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\langle x/x\rangle + 2\langle y/y\rangle = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$
Ce que nous voulions

Remarque 5 :

Toutes les normes ne proviennent pas de produits scalaires. Les normes issues du produit scalaire vérifient la propriété du parallélogramme et il y a des normes qui ne vérifient pas la propriété du parallélogramme, et on peut donc affirmer avec certitude qu'elles ne proviennent pas d'un produit scalaire.

Exemple

Dans $\mathbb{R}^2$, on construit la norme $\|\bullet\|_1$ par :

$$\|u\|_1 = |x| + |y| \text{ pour } u = (x, y)$$

On peut démontrer que $\|\bullet\|_1$ vérifie bien les axiômes de norme [1], mais ce n'est certainement pas une norme issue d'un produit scalaire puisque ne vérifiant pas l'identité du parallélogramme. En effet :

Soient $u = (1, 2)$ et $v = (1, -1)$; alors :

- ▷ $\|u+v\|_1 = \|(2, 1)\|_1 = 3$ et donc $\|u+v\|_1^2 = 9$
- ▷ $\|u-v\|_1 = \|(0, 3)\|_1 = 3$ et donc $\|u-v\|_1^2 = 9$
- ▷ Nous avons aussi : $\|u\|_1 = \|(1, 2)\|_1 = 3$ avec $\|u\|_1^2 = 9$
- ▷ Et $\|v\|_1 = \|(1, -1)\|_1 = 2$ avec $\|v\|_1^2 = 4$

Or $\|u+v\|_1^2 + \|u-v\|_1^2 = 18$ et $2\|u\|_1^2 + 2\|v\|_1^2 = 26$

Nous avons donc $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 \neq 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)$ et on montre ainsi que la norme $\|\bullet\|_1$ ne provient pas d'un produit scalaire

15.1.9 Corollaire

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien. Alors, pour tout $x \in E$ et tout $y \in E$, nous avons :

$$\langle x/y\rangle = \frac{\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2}{2}$$

Démonstration

Dans 15.1.8, nous avons démontré que $\langle x+y/x+y\rangle = \langle x/x\rangle + 2\langle x/y\rangle + \langle y/y\rangle$; et c'est facile de terminer ! !

15.1.10 Angle non orienté de 2 vecteurs

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien. Soient $u \in E$ et $v \in E$, 2 vecteurs de E non nuls tous les deux. On appelle angle non orienté de u et v un nombre $\alpha \in [0; \pi]$ tel que

$$\cos\alpha = \frac{\langle u/v\rangle}{\|u\|\,\|v\|}$$

Remarque 6 :

Ce nombre α existe, puisque d'après le lemme de Schwarz 15.1.3, nous avons $\left|\dfrac{\langle u/v\rangle}{\|u\|\,\|v\|}\right| \leqslant 1$

1. Le faire en exercice

15.1.11 Théorème de Pythagore

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien

1. **Pour tout $x \in E$ et tout $y \in E$, nous avons l'équivalence :**

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \iff \langle x/y \rangle = 0$$

2. **Si $x_1 \in E \dots x_n \in E$ sont des vecteurs orthogonaux deux à deux, (c'est à dire que si $i \neq j$, alors $\langle x_i/x_j \rangle = 0$) alors :**

$$\|x_1 + \cdots + x_n\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \|x_k\|^2$$

Démonstration

Il suffit d'utiliser les carrés à l'aide des produits scalaires

1. Nous avons $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x/y \rangle + \|y\|^2$
   - ▷ Donc, si $\langle x/y \rangle = 0$, alors $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$
   - ▷ Et, réciproquement, si $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$, alors, bien évidemment,$\langle x/y \rangle = 0$
2. De la même manière, nous avons :

$$\|x_1 + \cdots + x_n\|^2 = \langle x_1 + \cdots + x_n / x_1 + \cdots + x_n \rangle = \sum_{k=1}^{n} \langle x_k/x_k \rangle + 2\sum_{i \neq j} \langle x_i/x_j \rangle$$

   De $\langle x_i/x_j \rangle = 0$, nous tirons le résultat

Remarque 7 :

Dans le second point de 15.1.11, il n'y a pas d'équivalence. En effet, pour plus de 3 vecteurs, la réciproque est fausse, c'est à dire, si $\|x_1 + \cdots + x_n\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \|x_k\|^2$, avons nous $\langle x_i/x_j \rangle = 0$ pour $i \neq j$? ? ? La réponse est non.

Exemple :

Dans $\mathbb{R}^2$, prenons les vecteurs $u = (1,0)$, $v = (0,1)$ et $w = (1,-1)$

Alors :

- ▷ Nous avons $\|u\|^2 = 1$, $\|v\|^2 = 1$ et $\|w\|^2 = 2$ et donc : $\|u\|^2 + \|v\|^2 + \|w\|^2 = 4$
- ▷ Maintenant, $\|u+v+w\|^2 = \|(1,0) + (0,1) + (1,-1)\|^2 = \|(2,0)\|^2 = 4$

Nous avons bien $\|u+v+w\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 + \|w\|^2$, mais $\langle u/v \rangle = 0$, $\langle u/w \rangle = 1$ et $\langle w/v \rangle = -1$; les vecteurs ne sont pas 2 à 2 orthogonaux

15.1.12 Orthogonalité et liberté

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien.
Soit $X = \{x_1 \dots x_n\}$ une famille de n vecteurs deux à deux orthogonaux et non nuls, c'est à dire :

$$\textbf{pour tout } i, x_i \neq \overrightarrow{0} \textbf{ et } i \neq j \Longrightarrow \langle x_i/x_j \rangle = 0$$

Alors, la famille X est une famille libre

Démonstration

Soient $\lambda_1, \dots \lambda_n$, n réels tels que $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k = \overrightarrow{0}$
Alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$ tel que $1 \leqslant k \leqslant n$:

$$\begin{aligned} 0 = \left\langle \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j / x_k \right\rangle &= \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \left\langle x_j / x_k \right\rangle \\ &= \lambda_k \left\langle x_k / x_k \right\rangle \\ &= \lambda_k \left\| x_k \right\|^2 \end{aligned}$$

Comme $x_k \neq \overrightarrow{0}$, nous avons $\|x_k\|^2 \neq 0$ et de l'équation $\lambda_k \|x_k\|^2 = 0$, nous déduisons $\lambda_k = 0$, et ceci pour tout k.
Donc $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$. La famille X est donc une famille libre

15.1.13 Notion de base orthonormée

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien de dimension finie n

1. **Une base $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ est dite orthogonale lorsque**
$$\langle e_i / e_j \rangle = 0 \text{ si } i \neq j$$
2. **Une base $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ est dite orthonormée lorsque**
$$\langle e_i / e_j \rangle = 0 \text{ si } i \neq j \text{ et } \langle e_i / e_i \rangle = 1 \iff \|e_i\| = 1$$

Remarque 8 :

1. Il faut remarquer que nous ne nous posons pas la question de l'existence de ces bases orthonormées. Nous le ferons dans un cours ultérieur.
2. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien de dimension finie n de base orthonormée $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$.
Soient $x \in E$ et $y \in E$ tels que $x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k$ et $y = \sum_{k=1}^{n} y_k e_k$. Alors :
$$\begin{aligned} \langle x / y \rangle &= \left\langle \sum_{k=1}^{n} x_k e_k / \sum_{k=1}^{n} y_k e_k \right\rangle \\ &= \sum_{k=1}^{n} x_k \left\langle e_k / \sum_{j=1}^{n} y_j e_j \right\rangle \\ &= \sum_{k=1}^{n} x_k \left(\sum_{j=1}^{n} y_j \langle e_k / e_j \rangle \right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} x_k y_k \langle e_k / e_k \rangle \\ &= \sum_{k=1}^{n} x_k y_k \end{aligned}$$
Nous retrouvons ici, le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$

15.1.14 Proposition

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien de dimension finie n et de base orthonormée $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$
Alors, pour tout $x \in E$, nous avons :

$$x = \sum_{k=1}^{n} \langle x / e_i \rangle e_i \text{ et } \|x\|^2 = \sum_{k=1}^{n} |\langle x / e_i \rangle|^2$$

Démonstration

Soit $x \in E$

1. On écrit $x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k$. Alors, pour $i = 1, \cdots, n$, nous avons :

$$\langle x/e_i \rangle = \left\langle \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k / e_i \right\rangle = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \langle e_k/e_i \rangle = \lambda_i$$

   Donc, $\lambda_i = \langle x/e_i \rangle$; ce que nous voulions.

2. D'autre part, $\|x\|^2 = \langle x/x \rangle = \left\langle \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k / \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k \right\rangle$.
   La famille $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ étant orthonormée, d'après le théorème de Pythagore 15.1.11, nous avons :

$$\left\langle \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k / \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k \right\rangle = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2 = \sum_{k=1}^{n} \langle x/e_i \rangle^2$$

   Ce que nous voulions

Remarque 9 :

Nous retrouvons ces résultats dans les problèmes d'approximation et d'analyse de Fourier.

15.1.15 Proposition admise

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien de dimension finie et $F \subset E$, un sous-espace vectoriel de E. Alors :

1. **E est somme directe de F et $F^\perp$, c'est à dire $E = F \oplus F^\perp$**
2. **Nous avons $F^{\perp\perp} = F$**

Remarque 10 :

1. Nous avons déjà montré en 15.1.6 que si $X \subset E$, alors $X^\perp$ était un sous-espace vectoriel de E ; à plus forte raison si, F est un sous-espace vectoriel de E, $F^\perp$ est aussi un sous-espace vectoriel de E. Nous n'avons pas les outils pour montrer que $E = F \oplus F^\perp$
2. Le fait que $E = F \oplus F^\perp$ montre que tout $x \in E$ peut s'écrire de manière unique $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in F$ et $x_2 \in F^\perp$. Nous avons alors $\langle x_2/x_1 \rangle = 0$

Exercice 5 :

Dans cet exercice, nous allons montrer 15.1.15 dans des cas particuliers. On peut remarquer que E n'est donné de dimension finie.

1. E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien et $D \subset E$ est une droite vectorielle de base i. On suppose $\|i\| = 1$. Comme d'habitude, nous notons $D^\perp$ le sous-espace vectoriel des vecteurs de E qui sont orthogonaux à tout vecteur de D
   (a) Démontrez que, pour tout vecteur $u \in E$, les deux vecteurs $u_1 = \langle u/i \rangle\, i$ et $u_2 = u - u_1$ sont tels que :
   $$u_1 \in D \quad \text{et } u_1 \in D^\perp$$
   (b) Démontrer que D et $D^\perp$ sont 2 sous-espace vectoriels supplémentaires de E
2. E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien et $P \subset E$ est un plan vectoriel de base orthonormée $\{i, j\}$. Nous notons $P^\perp$ le sous-espace vectoriel des vecteurs de E qui sont orthogonaux à tout vecteur de P

(a) Démontrez que, pour tout vecteur $u \in E$, les deux vecteurs $u_1 = \langle u/i \rangle i + \langle u/j \rangle j$ et $u_2 = u - u_1$ sont tels que :

$$u_1 \in P \quad \text{et } u_1 \in P^{\perp}$$

(b) Démontrer que P et $P^{\perp}$ sont 2 sous-espace vectoriels supplémentaires de E

15.1.16 Définition de projection orthogonale

Etant donné que F et $F^{\perp}$ sont supplémentaires, d'après 7.11.1, il est possible de considérer une projection sur F, parallèlement à $F^{\perp}$

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien de dimension finie et $F \subset E$, un sous-espace vectoriel de E.
On sait que tout $x \in E$ peut s'écrire de manière unique $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in F$ et $x_2 \in F^{\perp}$
On appelle projection orthogonale sur F la projection sur F, parallèlement à $F^{\perp}$, c'est à dire une application p_F définie par :

$$\begin{cases} p_F : E & \longrightarrow & E \\ \quad x & \longmapsto & p_F(x) = x_1 \end{cases}$$

Remarque 11 :

Si nous suivons cette définition, nous avons $x = p_F(x) + x_2$, et que, donc $x_2 = x - p_F(x)$, à savoir que tout $x \in E$ s'écrit de manière unique $x = p_F(x) + (x - p_F(x))$ et que $\langle p_F(x) / x - p_F(x) \rangle = 0$

15.1.17 Théorème *(Propriétés des projections orthogonales)*

Beaucoup des items ci-après sont une redite de 7.11.2

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien de dimension finie et $F \subset E$, un sous-espace vectoriel de E. p_F est la projection orthogonale sur F. Alors :

1. **Pour tout $x \in E$, $x - p_F(x) \in F^{\perp}$ et $x = p_F(x) + p_{F^{\perp}}(x)$**
2. **Pour tout $x \in E$, nous avons $\|p_F(x)\| \leqslant \|x\|$**
3. **p_F est une application linéaire de E dans E ($p_F \in \mathcal{L}(E)$)**
4. **Si $\mathcal{B}_0 = \{f_1, \ldots, f_k\}$ est une base orthonormée de F, alors, pour tout $x \in E$, nous avons :**

$$p_F(x) = \sum_{i=1}^{k} \langle x/f_i \rangle f_i$$

5. **Si p_F est une projection orthogonale sur F, sous-espace vectoriel de E, alors $p_F \circ p_F = p_F$**
6. **Réciproquement, si p est un endomorphisme de E vérifiant $p \circ p = p$, et si, en plus, $\operatorname{Im} p \perp \ker p$, alors p est la projection orthogonale sur $\operatorname{Im} p$**
7. **Propriété de minimalité : Pour tout $x \in E$, $\|x - p_F(x)\| = \inf\limits_{w \in F} \|x - w\|$**

Démonstration

1. Le premier point est la redite de la remarque
2. Pour le second point point, comme $x = p_F(x) + x - p_F(x)$ et que $\langle p_F(x) / x - p_F(x) \rangle = 0$, d'après le théorème de Pythagorre 15.1.11, $\|x\|^2 = \|p_F(x)\|^2 + \|x - p_F(x)\|^2$, d'où $\|p_F(x)\|^2 \leqslant \|x\|^2$, c'est à dire $\|p_F(x)\| \leqslant \|x\|$
3. p_F est une application linéaire

   Nous retrouvons la démonstration de 7.11.2

   Soient $x \in E$ et $y \in E$. Alors :

- $x = p_F(x) + (x - p_F(x))$ et $y = p_F(y) + (y - p_F(y))$. Et donc
$$x + y = p_F(x) + p_F(y) + (x - p_F(x)) + (y - p_F(y))$$
F est un sous-espace vectoriel de E et donc $p_F(x) + p_F(y) \in F$.
D'autre part, $(x - p_F(x)) \in F^{\perp}$ et $(y - p_F(y)) \in F^{\perp}$. $F^{\perp}$ est aussi un sous-espace vectoriel de E et donc $(x - p_F(x)) + (y - p_F(y)) \in F^{\perp}$, de telle sorte que :
$$p_F(x + y) = p_F(x) + p_F(y)$$
- Soit $\lambda \in \mathbb{R}$; alors, $\lambda x = \lambda p_F(x) + \lambda(x - p_F(x))$
Des structures de sous-espace vectoriel de F et $F^{\perp}$, nous avons $\lambda p_F(x) \in F$ et $\lambda(x - p_F(x)) \in F^{\perp}$ et donc :
$$p_F(\lambda x) = \lambda p_F(x)$$

La projection orthogonale p_F est bien une application linéaire

4. Soit $x \in E$.
Nous avons $x - p_F(x) \in F^{\perp}$ et donc, pour tout j tel que $1 \leqslant j \leqslant k$, nous avons $\langle x - p_F(x) / f_j \rangle = 0$, c'est à dire $\langle x/f_j \rangle = \langle p_F(x) / f_j \rangle$
Nous écrivons $p_F(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} \lambda_i f_i$.
Alors, $\langle p_F(x) / f_j \rangle = \left\langle \displaystyle\sum_{i=1}^{k} \lambda_i f_i / f_j \right\rangle = \lambda_j$. Ainsi, $\langle x/f_j \rangle = \lambda_j$.
D'où $p_F(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} \langle x/f_j \rangle f_i$
5. <u>Montrons que $p_F \circ p_F = p_F$</u>
Soit $x \in E$
Alors $x = p_F(x) + (x - p_F(x))$ et $p_F(x)$ se décompose de manière unique en $p_F(x) = p_F(x) + \overrightarrow{0}$ avec $\overrightarrow{0} \in F^{\perp}$
Donc, $p_F(p_F(x)) = p_F(x)$, et donc $p_F \circ p_F = p_F$
6. <u>Réciproquement, soit p est un endomorphisme de E vérifiant $p \circ p = p$, et tel que $\mathrm{Im}p \perp \ker p$</u>
Nous allons montrer que $\mathrm{Im}p$ et $\ker p$ sont en somme directe et de l'orthogonalité $\mathrm{Im}p \perp \ker p$, nous déduirons que p est une projection orthogonale sur $\mathrm{Im}p$
Soit $x \in E$ Alors, $x = p(x) + x - p(x)$ et nous avons $p(x) \in \mathrm{Im}p$. Montrons que $x - p(x) \in \ker p$
$$p(x - p(x)) = p(x) - p(p(x)) = p(x) - p \circ p(x) = p(x) - p(x) = \overrightarrow{0}$$
Démontrons que $\mathrm{Im}p \cap \ker p = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$
Soit donc $u \in \mathrm{Im}p \cap \ker p$. Alors :
   - Basiquement, $p(u) = \overrightarrow{0}$
   - Comme $u \in \mathrm{Im}p$, il existe $z \in E$ tel que $p(z) = u$.

   Donc :
$$p(u) = p(p(z)) = p \circ p(z) = p(z) = u$$
Donc, $p(u) = u$ et comme $p(u) = \overrightarrow{0}$, nous avons $u = \overrightarrow{0}$.
Ainsi $\mathrm{Im}p \cap \ker p = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$ et nous avons $E = \mathrm{Im}p \oplus \ker p$ et p est ainsi une projection orthogonale sur $\mathrm{Im}p$
7. <u>Propriété de minimalité</u>
Soit $x \in E$.
Pour tout $w \in F$, nous avons : $\|x - w\|^2 = \|x - p_F(x) + p_F(x) - w\|^2$
   - Tout d'abord $x - p_F(x) \in F^{\perp}$
   - Et des propriétés de sous-espace vectoriel de F, nous avons $p_F(x) - w \in F$
   - Donc, d'après le théorème de pythagorre, $\|x - p_F(x) + p_F(x) - w\|^2 = \|x - p_F(x)\|^2 + \|p_F(x) - w\|^2$; donc $\|x - w\|^2 = \|x - p_F(x)\|^2 + \|p_F(x) - w\|^2$, de telle sorte que $\|x - w\|^2 \geqslant \|x - p_F(x)\|^2$, et ce, pour tout $x \in E$ et tout $w \in F$

   Nous avons donc bien, pour tout $x \in E$, $\|x - p_F(x)\| = \inf\limits_{w \in F} \|x - w\|$

Remarque 12 :

On vient de montrer 2 choses

1. Si p_F est une projection orthogonale sur F, alors les éléments de F sont invariants par p_F
2. Si p est un endomorphisme de E tel que $p \circ p = p$, alors, les éléments de $\text{Im}p$ sont invariants
3. La propriété de minimalité est un cas particulier de projection sur les convexes *(un sous-espace vectoriel est un convexe particulier)*. Cette propriété de minimalité a son importance dans les problèmes d'approximation.

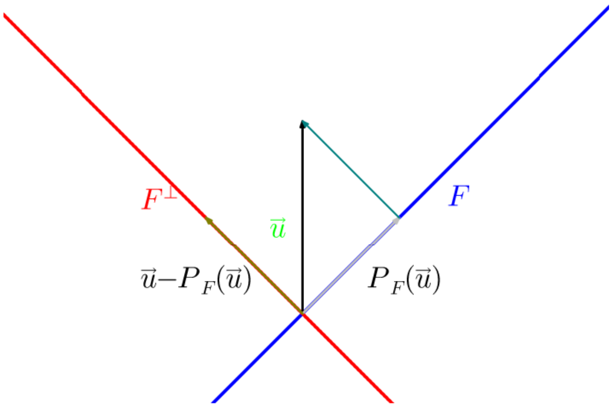

Figure 15.2 – Une visualisation des projections orthogonales

15.1.18 Définition de symétrie orthogonale

Comme dans la définition des projections orthogonales, étant donné que F et $F^{\perp}$ sont supplémentaires, d'après 7.11.4, il est possible de considérer une symétrie par rapport à F, parallèlement à $F^{\perp}$

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien de dimension finie et $F \subset E$, un sous-espace vectoriel de E. On sait que tout $x \in E$ peut s'écrire de manière unique $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in F$ et $x_2 \in F^{\perp}$
On appelle symétrie orthogonale par rapport à F une application σ_F définie par :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \sigma_F : E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & \sigma_F(x) = x_1 - x_2 \end{array} \right.$$

Remarque 13 :

En d'autre termes, comme, pour tout $x \in E$, nous pouvons écrire $x = p_F(x) + (x - p_F(x))$ avec $p_F(x) \in F$ et $x - p_F(x) \in F^{\perp}$, nous avons $\sigma_F(x) = p_F(x) - (x - p_F(x)) = 2p_F(x) - x$, ce qui donne, en termes d'applications linéaire : $\sigma_F = 2p_F - \text{Id}_E$

15.1.19 Théorème *(Propriétés des symétries orthogonales)*

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien de dimension finie et $F \subset E$, un sous-espace vectoriel de E. σ_F est la symétrie orthogonale par rapport à F. Alors :

1. **Pour tout $x \in E$, nous avons $\|\sigma_F(x)\| = \|x\|$**
2. **σ_F est une application linéaire de E dans E ($\sigma_F \in \mathcal{L}(E)$)**
3. **Si σ_F est une symétrie orthogonale par rapport à F sous-espace vectoriel de E, alors $\sigma_F \circ \sigma_F = \text{Id}_E$.**
   On dit que σ_F est involutive ou que c'est une involution

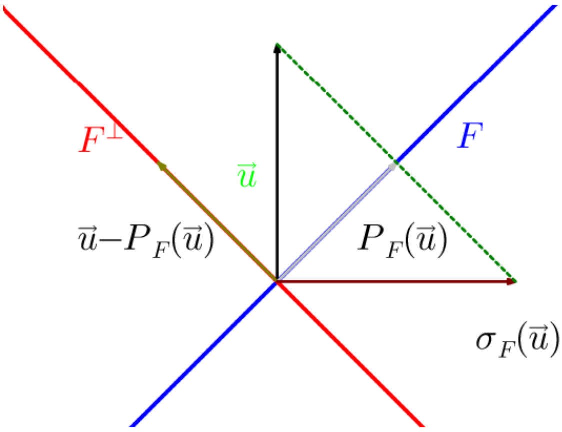

FIGURE 15.3 – Une visualisation des projections orthogonales et de la symétrie orthogonale

Démonstration

1. Montrons que, pour tout $x \in E$, $\|\sigma_F(x)\| = \|x\|$
   Il suffit d'utiliser le théorème de Pythagore 15.1.11.
   Soit $x \in E$; alors $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in F$ et $x_2 \in F^{\perp}$ et $\|x\|^2 = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2$
   De même, comme $\sigma_F(x) = x_1 - x_2$, nous avons $\|\sigma_F(x)\|^2 = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2$.
   D'où le résultat
2. σ_F est clairement une application linéaire de E dans E
3. σ_F est involutive
   Soit $x \in E$; il faut montrer que $\sigma_F \circ \sigma_F(x) = x$
   Nous avons $\sigma_F(x) = x_1 - x_2 = x_1 + (-x_2)$ et $\sigma_F(\sigma_F(x)) = x_1 - (-x_2) = x_1 + x_2 = x$
   Ce que nous voulions

   On pouvait aussi le démontrer autrement
   En utilisant le fait qu'en termes d'applications linéaire : $\sigma_F = 2p_F - \mathrm{Id}_E$. nous avons alors :

$$\sigma_F \circ \sigma_F = (2p_F - \mathrm{Id}_E) \circ (2p_F - \mathrm{Id}_E) = 4p_F \circ p_F - 2p_F - 2p_F + \mathrm{Id}_E = \mathrm{Id}_E$$

15.1.20 Quelques exercices résolus

Dans ces exercices, nous parlerons beaucoup de définition analytique. Qu'est ce que c'est ?
C'est trouver une relation entre les coordonnées..
Définir analytiquement une transformation, c'est donner les coordonnées de l'image en fonction de celles de l'antécédent. Pour une application linéaire, c'est aussi donner la matrice de cette application linéaire.

1. **Dans le plan**
   Donner la définition analytique de la projection orthogonale sur la droite Δ d'équation $y = x$
   Soit $u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ un vecteur de $\mathbb{R}^2$, alors, sa projection sur Δ sera $p_\Delta(u) = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$
   Comme $p_\Delta(u) \in \Delta$, nous avons $x' = y'$.
   D'autre part, $u - p_\Delta(u)$ est orthogonal à Δ, et si u_Δ est un vecteur de base de Δ, on peut choisir $u_\Delta = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Nous devons donc avoir $\langle u - p_\Delta(u) / u_\Delta \rangle = 0$, c'est à dire $(x - x') + (y - y') = 0 \iff x' + y' = x + y$
   Nous avons donc le système :

$$\begin{cases} x' = & y' \\ x' + y' = & x + y \end{cases} \iff \begin{cases} x' = & y' \\ 2x' = & x + y \end{cases} \iff \begin{cases} x' = & \dfrac{x+y}{2} \\ y' = & \dfrac{x+y}{2} \end{cases}$$

Nous avons ainsi la définition analytique de p_Δ

La matrice de p_Δ est donc $M(p_\Delta) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Comme la symétrie par rapport à Δ est donnée par $\sigma_\Delta = 2p_\Delta - \mathrm{Id}_2$, la matrice est donc donnée par :

$$M(\sigma_\Delta) = 2M(p_\Delta) - \mathrm{Id}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2. **Dans l'espace**

   Donner la définition analytique de la projection orthogonale sur le plan Π d'équation $x = 0$

   La méthode sera identique.

   Soit $u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ un vecteur de $\mathbb{R}^3$, alors, sa projection sur Π sera $p_\Pi(u) = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$

   Comme $p_\Pi(u) \in \Pi$, nous avons $x' = 0$.

   D'autre part, $u - p_\Pi(u)$ est orthogonal à Π, Π étant un plan, admet 2 vecteurs de base. Nous pouvons choisir $u_\Pi = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $v_\Pi = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ comme vecteurs de base.

   Nous devons donc avoir $\langle u - p_\Pi(u) / u_\Pi \rangle = 0$ et $\langle u - p_\Pi(u) / v_\Pi \rangle = 0$, c'est à dire :

   $$y - y' = 0 \text{ et } z - z' = 0$$

   Nous avons donc le système :

   $$\begin{cases} x' = & 0 \\ y' = & y \\ z' = & z \end{cases}$$

   Nous avons ainsi la définition analytique de p_Π

   La matrice de p_Π est donc $M(p_\Pi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

   Comme la symétrie par rapport à Π est donnée par $\sigma_\Pi = 2p_\Pi - \mathrm{Id}_3$, la matrice est donc donnée par :

   $$M(\sigma_\Pi) = 2M(p_\Pi) - \mathrm{Id}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

15.1.21 Exercices

Exercice 6 :

E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien de dimension 3 rapporté à une base orthonormée $\{i, j, k\}$. Soit $D \subset E$ une droite vectorielle incluse dans E. On désigne par ϖ la projection orthogonale de E sur D

1. La droite vectorielle D étant définie par l'une de ses bases u, définir analytiquement ϖ dans les cas suivants :

   (a) $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ (b) $u = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (c) $u = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ (d) $u = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$

2. La droite vectorielle D étant définie par 2 équations cartésiennes, définir analytiquement ϖ dans les cas suivants :

(a) $D = \left\{ \begin{array}{rl} x - 2y = & 0 \\ x + y + z = & 0 \end{array} \right.$

(b) $D = \left\{ \begin{array}{rl} x + z = & 0 \\ x = & 0 \end{array} \right.$

(c) $D = \left\{ \begin{array}{rl} x + y - z = & 0 \\ 2x + y + z = & 0 \end{array} \right.$

(d) $D = \left\{ \begin{array}{rl} x = & az + b \\ y = & cz + d \end{array} \right.$

3. Dans les situations précédentes, définir σ_D, la symétrie orthogonale par rapport à D

Exercice 7 :

E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien de dimension 3 rapporté à une base orthonormée $\{i, j, k\}$. Soit $P \subset E$ une droite vectorielle incluse dans E. On désigne par ϖ la projection orthogonale de E sur P

1. Soit $\overrightarrow{n}$ un vecteur unitaire *(c'est à dire que* $\|\overrightarrow{n}\| = 1$ de la droite D orthogonale à P. Démontrer que, pour tout $u \in E$:
$$\varpi(u) = u - \langle u / \overrightarrow{n} \rangle \overrightarrow{n}$$

2. La plan P étant défini par 1 équation cartésienne, définir analytiquement ϖ dans les cas suivants :

(a) $P :\ 2x - y + 2z = 0$ (b) $P :\ x - y = 0$ (c) $P :\ y = 0$ (d) $P :\ ax + by + cz = 0$

3. La plan P étant défini par une de ses bases $\{u_1; u_2\}$, définir analytiquement ϖ dans les cas suivants :

(a) $P :\ u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad u_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

(b) $P :\ u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(c) $P :\ u_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad u_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

(d) $P :\ u_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \gamma_1 \end{pmatrix} \quad u_2 = \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \\ \gamma_2 \end{pmatrix}$

4. Dans les situations précédentes, définir σ_P, la symétrie orthogonale par rapport à P