15.2 Groupe Orthogonal

15.2.1 Définition

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien de dimension finie et $\Phi \in \mathcal{L}(E)$
On dit que Φ est un endomorphisme orthogonal si et seulement si Φ conserve le produit scalaire, c'est à dire :

$$(\forall u \in E)(\forall v \in E)(\langle \Phi(u) / \Phi(v) \rangle = \langle u/v \rangle)$$

Remarque 14 :

Cette définition est encore valable si E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel quelconque, pas forcément de dimension finie.

Exemple 2 :

1. **Une projection orthogonale n'est pas un endomorphisme orthogonal**
   Dans un plan E de dimension 2 muni d'une base $\{i, j\}$ orthonormée. Considérons la projection orthogonale p sur la droite Δ d'équation $y = x$.
   Nous avons $p(i) = p(j) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ et donc $\langle p(i) / p(j) \rangle = \frac{1}{2}$, alors que $\langle i/j \rangle = 0$
   Une projection ne conserve donc pas le produit scalaire et n'est pas un endomorphisme orthogonal
2. **Une symétrie orthogonale est un endomorphisme orthogonal**
   Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien et $F \subset E$ un sous-espace vectoriel de E. On considère σ_F la symétrie orthogonale par rapport à F
   Soient $u \in E$ et $v \in E$. Alors, $u = u_F + u_{F^\perp}$ et $v = v_F + v_{F^\perp}$
   Donc, $\sigma_F(u) = u_F - u_{F^\perp}$, tout comme $\sigma_F(v) = v_F - v_{F^\perp}$.
   Alors, comme $\langle u_F / v_{F^\perp} \rangle = \langle v_F / u_{F^\perp} \rangle = 0$
   - $\langle u/v \rangle = \langle u_F + u_{F^\perp} / v_F + v_{F^\perp} \rangle = \langle u_F / v_F \rangle + \langle u_{F^\perp} / v_{F^\perp} \rangle$
   - $\langle \sigma_F(u) / \sigma_F(v) \rangle = \langle u_F - u_{F^\perp} / v_F - v_{F^\perp} \rangle = \langle u_F / v_F \rangle + \langle u_{F^\perp} / v_{F^\perp} \rangle$

   Et nous avons dons $\langle u/v \rangle = \langle \sigma_F(u) / \sigma_F(v) \rangle$; σ_F conserve donc le produit scalaire et est un endomorphisme orthogonal

Exercice 8 :

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien de dimension finie

1. Démontrer que si Φ est un endomorphisme orthogonal de E, alors $-\Phi$ en est un aussi
2. Soit Φ un endomorphisme orthogonal de E
   (a) Démontrer que s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ et un vecteur $u \in E$ tels que $\Phi(u) = \lambda u$, alors $\lambda = 1$ ou $\lambda = -1$
   (b) Démontrer que si 2 vecteurs $u \in E$ et $v \in E$ tels que $\Phi(u) = u$ et $\Phi(v) = -v$, alors u et v sont orthogonaux

15.2.2 Théorème

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien de dimension finie et $\Phi \in \mathcal{L}(E)$; Alors
Φ est un endomorphisme orthogonal si et seulement si Φ conserve la norme, c'est à dire :

$$(\forall u \in E)(\|\Phi(u)\| = \|u\|)$$

Démonstration

1. On suppose que Φ est orthogonal, et nous allons démontrer que Φ conserve la norme
   Soit $u \in E$; Φ étant un endomorphisme orthogonal, nous avons : $\langle \Phi(u) / \Phi(u) \rangle = \langle u/u \rangle$, c'est à dire $\|\Phi(u)\|^2 = \|u\|^2$. Autrement dit, $\|\Phi(u)\| = \|u\|$, c'est à dire Φ conserve la norme
2. On suppose que $\Phi \in \mathcal{L}(E)$ conserve la norme
   Montrons que Φ conserve le produit scalaire.
   D'après 15.1.9, nous avons pour tout $u \in E$ et tout $v \in E$:

$$\langle u/v \rangle = \frac{\|u+v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2}{2}$$

et

$$\langle \Phi(u) / \Phi(v) \rangle = \frac{\|\Phi(u) + \Phi(v)\|^2 - \|\Phi(u)\|^2 - \|\Phi(v)\|^2}{2}$$

   Φ conservant la norme, $\|\Phi(u)\|^2 = \|u\|^2$ et $\|\Phi(v)\|^2 = \|v\|^2$
   Φ étant linéaire, $\Phi(u) + \Phi(v) = \Phi(u+v)$ et donc $\|\Phi(u) + \Phi(v)\|^2 = \|\Phi(u+v)\|^2$.
   Réitérons le fait que Φ conserve la norme et nous avons : $\|\Phi(u+v)\|^2 = \|u+v\|^2$; et nous avons alors :

$$\langle \Phi(u) / \Phi(v) \rangle = \frac{\|\Phi(u) + \Phi(v)\|^2 - \|\Phi(u)\|^2 - \|\Phi(v)\|^2}{2} = \frac{\|u+v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2}{2} = \langle u/v \rangle$$

   Ainsi, Φ endomorphisme conservant la norme conserve aussi le produit scalaire.

15.2.3 Définition

On appelle isométrie un endomorphisme qui conserve la norme

Remarque 15 :

1. Une isométrie est donc forcément une application linéaire
2. En restreignant à un endomorphisme, nous avons pris, ici, une *définition restrictive* de l'isométrie. On peut rencontrer des isométries d'un ensemble vers un autre [2]

15.2.4 Théorème

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien de dimension finie et $\Phi : E \longrightarrow E$ une application quelconque ; Alors
Φ est un endomorphisme orthogonal si et seulement si Φ conserve le produit scalaire

Démonstration

1. Supposons que Φ soit un endomorphisme orthogonal
   Par définition d'endomorphisme orthogonal, Φ est linéaire et conserve le produit scalaire
2. Supposons que Φ, application quelconque conserve le produit scalaire
   - Tout d'abord, Φ conservant le produit scalaire, conserve aussi la norme, puisque, pour tout $u \in E$, npous avons :
     $$\|\Phi(u)\|^2 = \langle \Phi(u) / \Phi(u) \rangle = \langle u/u \rangle = \|u\|^2$$
     C'est à dire $\|\Phi(u)\| = \|u\|$
   - Nous allons montrer que Φ est linéaire

2. Mais, c'est une autre question !!

▷ Montrons que, pour tout $u \in E$ et tout $v \in E$, nous avons $\Phi(u+v) = \Phi(u) + \Phi(v)$
Pour ce faire, nous allons montrer que $\|\Phi(u+v) - \Phi(u) - \Phi(v)\| = 0$

$$\begin{aligned}
\|\Phi(u+v) - \Phi(u) - \Phi(v)\|^2 = &\ \langle \Phi(u+v) - \Phi(u) - \Phi(v) / \Phi(u+v) - \Phi(u) - \Phi(v)\rangle \\
= &\ \langle \Phi(u+v) / \Phi(u+v)\rangle - \langle \Phi(u+v) / \Phi(u)\rangle - \langle \Phi(u+v) / \Phi(v)\rangle \\
&- \langle \Phi(u) / \Phi(u+v)\rangle + \langle \Phi(u) / \Phi(u)\rangle + \langle \Phi(u) / \Phi(v)\rangle \\
&- \langle \Phi(v) / \Phi(u+v)\rangle + \langle \Phi(v) / \Phi(u)\rangle + \langle \Phi(v) / \Phi(v)\rangle \\
= &\ \|\Phi(u+v)\|^2 - \langle \Phi(u+v) / \Phi(u)\rangle - \langle \Phi(u+v) / \Phi(v)\rangle \\
&- \langle \Phi(u) / \Phi(u+v)\rangle + \|\Phi(u)\|^2 + \langle \Phi(u) / \Phi(v)\rangle \\
&- \langle \Phi(v) / \Phi(u+v)\rangle + \langle \Phi(v) / \Phi(u)\rangle + \|\Phi(v)\|^2 \\
= &\ \|\Phi(u+v)\|^2 + \|\Phi(u)\|^2 + \|\Phi(v)\|^2 \\
&-2\langle \Phi(u) / \Phi(u+v)\rangle - 2\langle \Phi(v) / \Phi(u+v)\rangle + 2\langle \Phi(v) / \Phi(u)\rangle
\end{aligned}$$

Φ conservant le produit scalaire,conserve aussi la norme et nous avons :

$$\|\Phi(u+v)\|^2 + \|\Phi(u)\|^2 + \|\Phi(v)\|^2 = \|u+v\|^2 + \|u\|^2 + \|v\|^2$$

Φ conservant le produit scalaire,nous avons :

$$-\langle \Phi(u) / \Phi(u+v)\rangle - \langle \Phi(v) / \Phi(u+v)\rangle + \langle \Phi(v) / \Phi(u)\rangle = -\langle u/u+v\rangle - \langle v/u+v\rangle + \langle v/u\rangle$$

La bilinéarité du produit scalaire nous montre que :

$$-\langle u/u+v\rangle - \langle v/u+v\rangle + \langle v/u\rangle = -\langle u/u\rangle - \langle u/v\rangle - \langle v/u\rangle - \langle v/v\rangle + \langle v/u\rangle = -\|u\|^2 - \|v\|^2 - \langle u/v\rangle$$

Et donc :

$$\|\Phi(u+v) - \Phi(u) - \Phi(v)\|^2 = \|u+v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2 - 2\langle u/v\rangle$$

Or :

$$\|u+v\|^2 = \langle u+v/u+v\rangle = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\langle u/v\rangle$$

Et donc, en synthèse, nous avons :

$$\|\Phi(u+v) - \Phi(u) - \Phi(v)\|^2 = \|u+v\|^2 - \|u+v\|^2 = 0$$

C'est à dire $\Phi(u+v) = \Phi(u) + \Phi(v)$

▷ Montrons que, pour tout $u \in E$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, nous avons $\Phi(\lambda u) = \lambda \Phi(u)$
Pour ce faire, nous allons montrer que $\|\Phi(\lambda u) - \lambda\Phi(u)\| = 0$
Comme tout à l'heure :

$$\begin{aligned}
\|\Phi(\lambda u) - \lambda\Phi(u)\|^2 = &\ \langle \Phi(\lambda u) - \lambda\Phi(u) / \Phi(\lambda u) - \lambda\Phi(u)\rangle \\
= &\ \langle \Phi(\lambda u) / \Phi(\lambda u)\rangle - 2\lambda\langle \Phi(\lambda u) / \Phi(u)\rangle + \lambda^2\langle \Phi(u) / \Phi(u)\rangle \\
= &\ \langle \lambda u/\lambda u\rangle - 2\lambda\langle \lambda u/u\rangle + \lambda^2\langle u/u\rangle \\
= &\ \lambda^2\langle u/u\rangle - 2\lambda^2\langle u/u\rangle + \lambda^2\langle u/u\rangle \\
= &\ 0
\end{aligned}$$

Ainsi, $\|\Phi(\lambda u) - \lambda\Phi(u)\|^2 = 0$ et donc $\Phi(\lambda u) = \lambda\Phi(u)$

Ainsi, l'application Φ est linéaire et donc $\Phi \in \mathcal{L}(E)$

Remarque 16 :

1. Nous avons les équivalences suivantes :
   (a) Φ application quelconque qui conserve le produit scalaire $\Longleftrightarrow$ Φ endomorphisme orthogonal
   (b) Φ isométrie vectorielle $\Longleftrightarrow$ Φ endomorphisme orthogonal
2. **Nous n'avons pas :** Φ application qui conserve la norme $\Longrightarrow$ Φ endomorphisme orthogonal

Exemple

Dans le plan vectoriel, assimilé à $\mathbb{R}^2$, nous considérons la droite vectorielle D définie par :

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } y = x\right\}$$

On considère l'application F définie par :
— $\mathrm{F}(u) = -u$ *si* $u \in D$
— $\mathrm{F}(u) = u$ *si* $u \notin D$
Clairement, cette application F conserve la norme, mais elle n'est pas linéaire

En effet, $\mathrm{F}[(1,1)] = (1,1)$ et $\mathrm{F}[(1,-1)] = (-1,1)$ et $\mathrm{F}[(1,1)+(1,-1)] = \mathrm{F}[(2,0)] = (-2,0)$, alors que $\mathrm{F}[(1,1)] + \mathrm{F}[(1,-1)] = (1,1)+(-1,1) = (0,2)$.
Nous avons donc $\mathrm{F}[(1,1)+(1,-1)] \neq \mathrm{F}[(1,1)] + \mathrm{F}[(1,-1)]$. F n'est donc pas linéaire.

Exercice 9 :

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien de dimension finie et $\Phi : E \longrightarrow E$ une application quelconque. On suppose :

$$\Phi\left(\overrightarrow{0}\right) = \overrightarrow{0} \text{ et } \left((\forall u \in E)(\forall v \in E) \|\Phi(u) - \Phi(v)\| = \|u - v\|\right)$$

1. Démontrer que Φ conserve la norme et le produit scalaire
2. En déduire que Φ est un endomorphisme orthogonal de E

15.2.5 Proposition

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien de dimension finie et $\Phi \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme orthogonal
Alors, Φ est bijectif, c'est à dire que $\Phi \in \mathrm{GL}(E)$

Démonstration

Soit $\Phi \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme orthogonal. Pour montrer que Φ est bijectif, il suffit de montrer que $\ker \Phi = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$.
Soit donc $u \in \ker \Phi$; alors, $\Phi(u) = \overrightarrow{0}$, c'est à dire $\|\Phi(u)\| = 0$. Φ étant un endomorphisme orthogonal, conserve la norme, et donc $\|\Phi(u)\| = \|u\| = 0$, et d'après les axiômes de normes, $u = \overrightarrow{0}$.
Ainsi $\ker \Phi = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$ et Φ est une bijection.

Remarque 17 :

Une projection orthogonale n'est pas bijective et ne peut donc être un endomorphisme orthogonal ; on retrouve ici, l'exemple de la définition 15.2.1

15.2.6 Théorème

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien de dimension finie. On appelle $\mathrm{O}(E)$ l'ensemble des endomorphismes orthogonaux de E. Alors,
$(\mathrm{O}(E), \circ)$ muni de la loi de composition des applications est un sous-groupe de $(\mathrm{GL}(E), \circ)$
$\mathrm{O}(E)$ est appelé le groupe orthogonal

Démonstration

Nous allons faire la démonstration classique et établirons ainsi des résultats importants ; dans tous les cas, la composition des applications est associative

1. Tout d'abord, $\mathrm{O}(E) \neq \emptyset$
   De manière évidente, l'application identique Id_E est un endormorphisme qui conserve le produit scalaire, et donc $\mathrm{Id}_E \in \mathrm{O}(E)$

2. Montrons que la loi $\circ$ est interne
   C'est à dire que si f et g sont des endomorphismes orthogonaux, alors $f \circ g$ en est aussi un.
   Soient $u \in E$ et $v \in E$. Alors :
   $$\langle f(g(u)) / f(g(v)) \rangle = \langle g(u) / g(v) \rangle = \langle u/v \rangle$$
   Ce qui montre que $f \circ g$ conserve le produit scalaire, et donc $f \circ g \in \mathrm{O}(E)$
3. Montrons que si $\Phi \in \mathrm{O}(E)$, alors $\Phi^{-1} \in \mathrm{O}(E)$
   Tout d'abord, nous savons que si $\Phi \in \mathrm{O}(E)$, alors Φ est bijective, et donc que Φ^{-1} existe. Il faut simplement montrer que $\Phi^{-1} \in \mathrm{O}(E)$
   Soient $u \in E$ et $v \in E$. Alors :
   $$\langle u/v \rangle = \left\langle \Phi \circ \Phi^{-1}(u) / \Phi \circ \Phi^{-1}(v) \right\rangle = \left\langle \Phi^{-1}(u) / \Phi^{-1}(v) \right\rangle$$
   Donc Φ^{-1} conserve le produit scalaire. Ainsi $\Phi^{-1} \in \mathrm{O}(E)$

Donc $(\mathrm{O}(E), \circ)$ muni de la loi de composition des applications est un groupe ; il faut remarquer que **ce n'est pas un groupe commutatif**

15.2.7 Théorème

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien de dimension finie. Alors,
$\Phi \in \mathcal{L}(E)$ est un endomorphisme orthogonal si et seulement si
Φ transforme toute base orthonormée en une base orthonormée

Démonstration

1. Supposons que $\Phi \in \mathcal{L}(E)$ soit un endomorphisme orthogonal
   Alors, Φ conserve le produit scalaire et la norme ; donc transforme une base orthonormée en une base orthonormée
2. Réciproquement, supposons que $\Phi \in \mathcal{L}(E)$ transforme toute base orthonormée en une base orthonormée
   Soit $\{a_1, \dots, a_n\}$ une base orthonormée de E ; alors $\{\Phi(a_1), \dots, \Phi(a_n)\}$ est aussi une base orthonormée.
   Soit $x \in E$, alors $x = \sum_{k=1}^{n} x_k a_k$, et la base $\{a_1, \dots, a_n\}$ étant une base orthonormée de E, d'après 15.1.14, nous avons $\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}$
   Nous avons aussi $\Phi(x) = \sum_{k=1}^{n} x_k \Phi(a_k)$, et toujours d'après 15.1.14, nous avons $\|\Phi(x)\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}$
   D'où $\|x\| = \|\Phi(x)\|$, et d'après 15.2.4, Φ est un endomorphisme orthogonal

15.2.8 Corollaire

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien de dimension finie. Alors, étant données deux bases orthonormées $\{a_1, \dots, a_n\}$ et $\{b_1, \dots, b_n\}$ de E, il n'existe qu'un et un seul endomorphisme orthogonal qui transforme la base $\{a_1, \dots, a_n\}$ en la $\{b_1, \dots, b_n\}$

Exercice 10 :

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien muni d'une base orthonormée $\{i, j, k\}$. Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ de matrice, dans la base $\{i, j, k\}$:
$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$
Montre que $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ est un endomorphisme orthogonal

15.2.9 Proposition

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien
Les seuls endomorphismes orthogonaux involutifs sont les symétries orthogonales
Autrement dit :
σ est un endomorphisme orthogonal involutif si et seulement si σ est une symétrie orthogonale

Démonstration

1. Soit F un sous-espace vectoriel de E et σ une symétrie orthogonale par rapport à F
   Nous avons déjà démontré que σ est un endomorphisme orthogonal
2. Réciproquement, soit σ un endomorphisme orthogonal involutif
   Nous allons montrer que σ est une symétrie orthogonale.
   Tout d'abord, σ est un endomorphisme involutif, et donc, d'après 7.11.6, σ est une symétrie vectorielle par rapport à $\mathcal{V}$ parallèlement à $\mathcal{V}_1$ où :
   - $\mathcal{V}$ est le sous-espace vectoriel des vecteurs invariants par σ
   - $\mathcal{V}_1$ est le sous-espace vectoriel des vecteurs transformés en leur opposé par σ
   - Nous avons $E = \mathcal{V} \oplus \mathcal{V}_1$

   Nous souhaiterions montrer que $\mathcal{V}_1 = \mathcal{V}^{\perp}$.
   Pour cela, nous allons montrer que pour tout $x \in \mathcal{V}$ et tout $y \in \mathcal{V}_1$, nous avons $\langle x/y\rangle = 0$, et d'après la définition 15.1.5, nous aurons $\mathcal{V}_1 = \mathcal{V}^{\perp}$.
   Soient donc $x \in \mathcal{V}$ et $y \in \mathcal{V}_1$. Alors :
   Comme σ est un endomorphisme orthogonal, $\langle \sigma(x)/\sigma(y)\rangle = \langle x/y\rangle$
   D'autre part, $\sigma(x) = x$ et $\sigma(y) = -y$, et donc $\langle \sigma(x)/\sigma(y)\rangle = \langle x/-y\rangle = -\langle x/y\rangle$
   En conclusion, nous avons $\langle x/y\rangle = -\langle x/y\rangle$ et donc, $\langle x/y\rangle = 0$
   Ce que nous voulions

15.2.10 Exercices

Exercice 11 :

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien. Est-ce qu'une homothétie de E est un endomorphisme orthogonal ?

Exercice 12 :

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien de dimension 3, rapporté à une base orthonormée $\{i, j, k\}$.
Définir analytiquement la symétrie orthogonale σ par rapport au plan P d'équation $x - y + z = 0$

Exercice 13 :

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien de dimension 3, rapporté à une base orthonormée $\{i, j, k\}$. Soit f l'endomorphisme de E ($f \in \mathcal{L}(E)$) dont la matrice dans la base $\{i, j, k\}$ est :

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Démontrer que f est une symétrie orthogonale par rapport à une droite $D \subset E$

Exercice 14 :

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien de dimension 3, rapporté à une base orthonormée $\{i, j, k\}$. Soit φ l'endomorphisme de E ($\varphi \in \mathcal{L}(E)$) dont la matrice dans la base $\{i, j, k\}$ est :

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Démontrer que l'endomorphisme φ est orthogonal
2. Démontrer que l'ensemble des vecteurs invariants par φ est une droite vectorielle D dont on déterminera un vecteur unitaire u
3. Démontrer que, pour tout vecteur unitaire v orthogonal à u, le vecteur $\langle v/\varphi(v)\rangle$ est constant.
4. Déterminer l'ensemble des vecteurs $w \in E$ tels que $\varphi(w) = -w$
5. Déterminer B la matrice de l'endomorphisme φ^{-1} dans la base $\{i, j, k\}$; quelle relation y-a-t-il entre A et B ?

Exercice 15 :

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien. Soit $i \in E$, un vecteur unitaire *(c'est à dire tel que $\|i\| = 1$)*. On désigne par f l'application de E dans E, par :

$$\left\{\begin{array}{rcl} f : E & \longrightarrow & E \\ u & \longmapsto & f(u) = 2\langle u/i\rangle - u \end{array}\right.$$

1. Démontrer que f est un endomorphisme orthogonal involutif de E
2. Quel est l'ensemble des vecteurs invariants ? En déduire la nature de f
3. On appelle $D^\perp$ l'ensemble des vecteurs orthogonaux à la droite D de base i. Démontrer que l'application τ de E dans E, définie pour tout $u \in E$ par $\tau(u) = -f(u)$ est une symétrie orthogonale par rapport à $D^\perp$
4. Dans cette question, on suppose $\dim E = 2$ et que E est rapporté à une base orthonormée $\{i, j\}$. Utiliser les résultats précédents pour définir analytiquement la symétrie orthogonale par rapport à la droite D_u engendrée par le vecteur u, dans les cas suivants :

   (a) $u = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ (b) $u = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ (c) $u = \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$ (d) $u = \begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$

5. Dans cette question, on suppose $\dim E = 3$ et que E est rapporté à une base orthonormée $\{i, j, k\}$. Utiliser les résultats précédents pour définir analytiquement la symétrie orthogonale par rapport à la droite D_u engendrée par le vecteur u, dans les cas suivants :

   (a) $u = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ (b) $u = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ (c) $u = \begin{pmatrix}-2\\1\\2\end{pmatrix}$ (d) $u = \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$

6. Dans cette question, on suppose $\dim E = 3$ et que E est rapporté à une base orthonormée $\{i, j, k\}$. Utiliser les résultats précédents pour définir analytiquement la symétrie orthogonale par rapport au plan P dont une équation cartésienne est :

   (a) $z = 0$ (b) $x + y = 0$ (c) $x + y + z = 0$ (d) $ax + by + cz = 0$

7. **Pour aller plus loin**

   (a) Etudier f_1 l'application de E dans E définie par :

   $$\left\{\begin{array}{rcl} f_1 : E & \longrightarrow & E \\ u & \longmapsto & f_1(u) = \langle u/i\rangle - u \end{array}\right.$$

   (b) Etudier f_2 l'application de E dans E définie par :

   $$\left\{\begin{array}{rcl} f_2 : E & \longrightarrow & E \\ u & \longmapsto & f_2(u) = \langle u/i\rangle + u \end{array}\right.$$

Exercice 16 :

E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien tel que $\dim E = 3$ et E est rapporté à une base orthonormée $\{i, j, k\}$. On appelle D_i, la droite vectorielle engendrée par i, D_j, la droite vectorielle engendrée par j et D_k, la droite vectorielle engendrée par k.
On appelle :

- ▷ σ_i, la symérie orthogonale par rapport à D_i
- ▷ σ_j, la symérie orthogonale par rapport à D_j
- ▷ σ_k, la symérie orthogonale par rapport à D_k

1. Démontrez que nous avons $\sigma_i \circ \sigma_j = \sigma_j \circ \sigma_i = \sigma_k$
2. On considère l'ensemble $\{\mathrm{Id}_E, \sigma_i, \sigma_j, \sigma_k\}$ muni de la composition des applications. Montrer que c'est un sous-groupe de $(\mathrm{O}(E), \circ)$ le groupe orthogonal de E

Exercice 17 :

E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien tel que $\dim E = 1$, c'est à dire que E est une droite vectorielle. On suppose que i est un vecteur unitaire qui engendre E. Quels sont tous les endomorphismes orthogonaux de E ?

Exercice 18 :

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien et $f \in \mathrm{O}(E)$. On appelle I l'ensemble des vecteurs invariants par f, c'est à dire :

$$I = \{u \in E \text{ tels que } f(u) = u\}$$

Démontrer que $f\left(I^{\perp}\right) \subset I^{\perp}$