15.3 Groupe Orthogonal du plan vectoriel *(dimension 2)*

Dans cette section, E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien de dimension 2 *(c'est donc un plan)* rapporté à une base orthonormée $\mathcal{B}_0 = \{i, j\}$

15.3.1 Introduction, notations

1. **On appelle toujours $\mathrm{O}(E)$ le groupe orthogonal de E**
2. **A chaque endomorphisme $f \in \mathrm{O}(E)$, on fait correspondre une matrice carrée, dépendante de la base$\mathcal{B}_0$, $\mathcal{M}_{\mathcal{B}_0}(f) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$**
3. **On appelle $\mathrm{O}_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 qui sont les matrices d'un endomorphisme orthogonal $f \in \mathrm{O}(E)$**
4. **Etant donné l'isomorphisme entre $\mathrm{O}(E)$ et $\mathrm{O}_2(\mathbb{R})$, étudier $\mathrm{O}_2(\mathbb{R})$, c'est aussi étudier $\mathrm{O}(E)$**

15.3.2 Proposition

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien de dimension 2 rapporté à une base orthonormée $\mathcal{B}_0 = \{i, j\}$. Alors :

$$f \in \mathrm{O}(E) \Longleftrightarrow \mathcal{M}_{\mathcal{B}_0}(f) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \text{ ou } \mathcal{M}_{\mathcal{B}_0}(f) = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \text{ avec } a^2 + b^2 = 1$$

Autrement dit :

$$A \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R}) \Longleftrightarrow A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \text{ ou } A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \text{ avec } a^2 + b^2 = 1$$

Démonstration

Soit $f \in \mathrm{O}(E)$ de matrice $\mathcal{M}_{\mathcal{B}_0}(f) = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$

Nous avons donc : $f(i) = ai + bj$ et $f(j) = ci + dj$

Comme f est un endomorphisme orthogonal, $\|f(i)\| = \|f(j)\| = 1$ et $\langle f(i) / f(j) \rangle = \langle i/j \rangle = 0$, autrement dit, $a^2 + b^2 = c^2 + d^2 = 1$ et $ac + bd = 0$. Nous avons donc un système de 3 équations à 4 inconnues.

- Supposons $a = 0$

  Alors, le système devient :

$$\begin{cases} b^2 = & 1 \\ c^2 + d^2 = & 1 \\ bd = & 0 \end{cases}$$

  D'où nous tirons tout de suite : $b = \pm 1$ et $d = 0$ et donc $c = \pm 1$. D'où nous obtenons ainsi 4 premières matrices :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad A_4 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

  Remarquons que nous avons $A_4 = -A_1$ et $A_2 = -A_3$

- Supposons maintenant que $a \neq 0$

  Alors, le système devient :

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = & 1 \\ c^2 + d^2 = & 1 \\ ac + bd = & 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = & 1 \\ c^2 + d^2 = & 1 \\ c = & \dfrac{-bd}{a} \end{cases}$$

Remplaçons la valeur de c dans l'équation $c^2 + d^2 = 1$. nous avons alors :

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = & 1 \\ c^2 + d^2 = & 1 \\ c = & \dfrac{-bd}{a} \end{cases} \iff \begin{cases} a^2 + b^2 = & 1 \\ \dfrac{b^2 d^2}{a^2} + d^2 = & 1 \\ c = & \dfrac{-bd}{a} \end{cases}$$

Or, $\dfrac{b^2 d^2}{a^2} + d^2 = 1 \iff b^2 d^2 + a^2 d^2 = a^2 \iff d^2 \left(a^2 + b^2\right) = a^2 \iff d^2 = a^2$. D'où $d = \pm a$
Si $d = a$, alors $c = -b$ et si $d = -a$, alors $c = b$. D'où nous tirons 2 types de matrices :

$$B_1 = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \quad B_2 = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \text{ avec } a^2 + b^2 = 1$$

▷ Les matrices A_1 et A_4 sont du type B_2 avec $a = 0$ et $b = 1$ pour A_1 et $a = 0$ et $b = -1$ pour A_4 alors que les matrices A_2 et A_3 sont du type B_1 avec $a = 0$ et $b = 1$ pour A_2 et $a = 0$ et $b = -1$ pour A_3

Remarque 18 :

On peut remarquer que pour toute matrice $A \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R})$ $\det A = \pm 1$

15.3.3 Proposition

1. **On appelle $\mathrm{O}_2^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices $A \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R})$ telles que $\det A = +1$**
   Alors, $\left(\mathrm{O}_2^+(\mathbb{R}), \times\right)$ est un sous-groupe commutatif et distingué de $\mathrm{O}_2(\mathbb{R})$
2. **Les éléments de $\mathrm{O}_2^+(\mathbb{R})$ sont appelés rotations ou isométries positives**

Démonstration

1. **Montrons que $\left(\mathrm{O}_2^+(\mathbb{R}), \times\right)$ est un sous-groupe de $\mathrm{O}_2(\mathbb{R})$**
   (a) Premièrement, $\mathrm{O}_2^+(\mathbb{R}) \neq \emptyset$ puisque $\mathrm{Id}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R})$ et $\det \mathrm{Id}_2 = 1$
   On démontrerait de même que $-\mathrm{Id}_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathrm{O}_2^+(\mathbb{R})$
   (b) La multiplication des matrices est interne puisque si $A \in \mathrm{O}_2^+(\mathbb{R})$ et $B \in \mathrm{O}_2^+(\mathbb{R})$, alors :
   $$\det(A \times B) = \det A \times \det B = 1 \times 1 = 1$$
   Donc, le produit $A \times B \in \mathrm{O}_2^+(\mathbb{R})$
   (c) Soit $A \in \mathrm{O}_2^+(\mathbb{R})$, alors $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ avec $a^2 + b^2 = 1$ et donc, $A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ avec $a^2 + b^2 = 1$ et donc $A^{-1} \in \mathrm{O}_2^+(\mathbb{R})$
   Ce qui montre que $\left(\mathrm{O}_2^+(\mathbb{R}), \times\right)$ est un sous-groupe de $\mathrm{O}_2(\mathbb{R})$
2. **Montrons que $\left(\mathrm{O}_2^+(\mathbb{R}), \times\right)$ est un sous-groupe commutatif de $\mathrm{O}_2(\mathbb{R})$**
   Il suffit d'utiliser le calcul matriciel pour le montrer : si $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ avec $a^2 + b^2 = 1$ et $X = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$ avec $x^2 + y^2 = 1$, nous avons
   - $A \times X = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax - by & -ay - bx \\ bx + ay & -by + ax \end{pmatrix}$
   - $X \times A = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xa - yb & -xb - ay \\ ya + xb & -yb + xa \end{pmatrix}$

Nous avons bien $A\times X=X\times A$. Le sous-groupe $\left(\mathrm{O}_2^+(\mathbb{R}),\times\right)$ est bien un sous-groupe commutatif de $\mathrm{O}_2(\mathbb{R})$

3. **$\left(\mathrm{O}_2^+(\mathbb{R}),\times\right)$ est un sous-groupe distingué de $\mathrm{O}_2(\mathbb{R})$**
Soit donc $A\in\mathrm{O}_2^+(\mathbb{R})$ et $X\in\mathrm{O}_2(\mathbb{R})$; il faut donc montrer que $X\times A\times X^{-1}\in\mathrm{O}_2^+(\mathbb{R})$. Or :
$$\det\left(X\times A\times X^{-1}\right)=\det X\times\det A\times\det X^{-1}=\det A\times\det X\times\det X^{-1}=1$$
puisque $\det A=1$ et $\det X\times\det X^{-1}=1$
Donc $X\times A\times X^{-1}\in\mathrm{O}_2^+(\mathbb{R})$

Remarque 19 :

1. Les applications $f\in\mathrm{O}(E)$ telles que $\mathcal{M}(f)\in\mathrm{O}_2^+(\mathbb{R})$ sont aussi appelées rotations
2. En utilisant l'isomorphisme avec $\mathrm{O}_2(\mathbb{R})$, l'ensemble des rotations de $\mathrm{O}(E)$ forme, pour la composition des applications, un sous-groupe commutatif et distingué de $\mathrm{O}(E)$ noté, par analogie, $\mathrm{O}^+(E)$
3. Id_E et $-\mathrm{Id}_E$ sont des rotations involutives
4. Si $f\in\mathrm{O}^+(E)$ et $f\neq\mathrm{Id}_E$, le seul vecteur invariant par f est le vecteur nul $\overrightarrow{0}$

15.3.4 Théorème

1. **On appelle $\mathrm{O}_2^-(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices $A\in\mathrm{O}_2(\mathbb{R})$ telles que $\det A=-1$**
2. **On appelle $\mathrm{O}^-(E)$ les endomorphismes $f\in\mathrm{O}(E)$ dont la matrice $\mathcal{M}(f)\in\mathrm{O}_2^-(\mathbb{R})$. Les éléments de $\mathrm{O}_2^-(\mathbb{R})$ sont appelés isométries négatives**

Soit f un endomorphisme orthogonal du plan. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. **$f\in\mathrm{O}^-(E)$**
2. **$f\neq\mathrm{Id}_E$ et $f\neq-\mathrm{Id}_E$ et f est involutive**
3. **f est une symétrie orthogonale par rapport à une droite vectorielle**
4. **Le sous-espace vectoriel des vecteurs invariants est une droite vectorielle**

Démonstration

1. **On suppose que $f\in\mathrm{O}^-(E)$, et on démontre que $f\neq\mathrm{Id}_E$ et $f\neq\mathrm{Id}_E$ et f est involutive**
Si $f\in\mathrm{O}^-(E)$, alors $\mathcal{M}(f)=\begin{pmatrix}a&b\\b&-a\end{pmatrix}$
   - ▷ De par la forme de la matrice, $f\neq\mathrm{Id}_E$ et $f\neq\mathrm{Id}_E$. D'autre part, $\det\mathrm{Id}_2=\det-\mathrm{Id}_2=1$ et donc sont des éléments de $\mathrm{O}_2^+(\mathbb{R})$ [3], alors que $\det\mathcal{M}(f)=-1$
   - ▷ Calculons $\mathcal{M}(f\circ f)=\mathcal{M}\left(f^2\right)=\left(\mathcal{M}(f)\right)^2$.
$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix}a&b\\b&-a\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}a&b\\b&-a\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}a^2+b^2&ab-ba\\ba-ab&b^2+a^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\end{array}$$
Donc $\left(\mathcal{M}(f)\right)^2=\mathrm{Id}_2$ et donc $f\circ f=\mathrm{Id}_E$; f est donc involutive
2. **Supposons $f\neq\mathrm{Id}_E$ et $f\neq-\mathrm{Id}_E$ et f est involutive**
f étant un endomorphisme orthogonal involutif, alors f est une symétrie orthogonale d'axe l'ensemble des vecteurs invariants de f. On appelle I l'ensemble des vecteurs invariants par f. I est un sous-espace vectoriel de E
   - ▷ Si $\dim I=2$, alors $I=E$ et $f=\mathrm{Id}_E$; ce qui est impossible

3. En utilisant les déterminants, il est aisé de montrer que $\mathrm{O}_2^-(\mathbb{R})\cap\mathrm{O}_2^+(\mathbb{R})=\emptyset$

- ▷ Si $\dim I = 0$, alors $I = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$ et donc $f = -\mathrm{Id}_E$, ce qui est impossible.
- ▷ Donc, $\dim I = 1$ et f est une symétrie orthogonale par rapport à I

3. **Supposons que f soit une symétrie orthogonale par rapport à une droite vectorielle**
   Soit D cette droite vectorielle ; par définition des symétries, D est aussi l'ensemble des vecteurs invariants.
4. **Soit f un endomorphisme orthogonal du plan tel que le sous-espace vectoriel des vecteurs invariants soit une droite vectorielle**
   Alors, la matrice de f est de 2 formes :
   - ▷ La première : $\mathcal{M}(f) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, avec $a^2+b^2 = 1$, mais c'est impossible puisque le seul vecteur invariant pour cette matrice est le vecteur nul
   - ▷ Il n'y a donc pas d'autre solution pour la matrice de f qui sera donc $\mathcal{M}(f) = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$, avec $a^2 + b^2 = 1$ et donc $f \in \mathrm{O}^-(E)$

15.3.5 Proposition

1. **Pour toute matrice $A \in \mathrm{O}_2^+(\mathbb{R})$ et toute matrice $B \in \mathrm{O}_2^-(\mathbb{R})$, le produite $A \times B \in \mathrm{O}_2^-(\mathbb{R})$**
2. **Pour toute matrice $A \in \mathrm{O}_2^-(\mathbb{R})$ et toute matrice $B \in \mathrm{O}_2^-(\mathbb{R})$, le produite $A \times B \in \mathrm{O}_2^+(\mathbb{R})$**

Démonstration

La démonstration est facile : il suffit d'utiliser les déterminants

Remarque 20 :

Si E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien de dimension 2, on peut, d'ores et déjà, par isomorphisme, reporter ce résultat aux endomorphismes de $\mathrm{O}^-(E)$ et $\mathrm{O}^+(E)$

15.3.6 Théorème

Toute rotation $A \in \mathrm{O}_2^+(\mathbb{R})$ est la composée de 2 symétries orthogonales de $\mathrm{O}_2^-(\mathbb{R})$, l'une d'entre elles pouvant être choisie arbitrairement

Démonstration

Soit $A \in \mathrm{O}_2^+(\mathbb{R})$ et $S \in \mathrm{O}_2^-(\mathbb{R})$. Alors, d'après 15.3.5 le produit $A \times S \in \mathrm{O}_2^-(\mathbb{R})$. Il existe donc $S_1 \in \mathrm{O}_2^-(\mathbb{R})$ tel que $A \times S = S_1$
Comme $S^2 = \mathrm{Id}_2$, nous avons :

$$(A \times S) \times S = S_1 \times S \Longleftrightarrow A \times (S \times S) = S_1 \times S \Longleftrightarrow A = S_1 \times S$$

Ce que nous voulions

Remarque 21 :

Il est très possible de démontrer différemment, et nous avons, alors, un résultat complémentaire :
- De $S^2 = \mathrm{Id}_2$, nous avons $A = A \times S \times S$ et donc $A = (A \times S) \times S$. Comme $A \times S \in \mathrm{O}_2^-(\mathbb{R})$, en posant $S_1 = A \times S$, nous avons $A = S_1 \times S$
- Toujours parce que $S^2 = \mathrm{Id}_2$, nous avons $A = S \times S \times A$ et donc $A = S \times (S \times A)$. Comme $S \times A \in \mathrm{O}_2^-(\mathbb{R})$, en posant $S_2 = S \times A$, nous avons $A = S \times S_2$

A priori, bien entendu, nous avons $S_1 \neq S_2$

15.3.7 Corollaire

Soit $A \in \mathrm{O}_2^+(\mathbb{R})$. Alors $A^{-1} = S \times A \times S$ où S est un élément quelconque de $\mathrm{O}_2^-(\mathbb{R})$

Démonstration

Soit $A \in \mathrm{O}_2^+(\mathbb{R})$
Alors, pour tout $S \in \mathrm{O}_2^-(\mathbb{R})$, nous avons $A \times S \in \mathrm{O}_2^-(\mathbb{R})$, et donc $(A \times S) \times (A \times S) = \mathrm{Id}_2$, c'est à dire :

$$(A \times S) \times (A \times S) = \mathrm{Id}_2 \iff A \times (S \times A \times S) = \mathrm{Id}_2$$

Et donc, nous avons bien $A^{-1} = S \times A \times S$

15.3.8 Proposition

1. **Toutes les matrices de $\mathrm{O}_2(\mathbb{R})$ sont du type :**

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \text{ ou } A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \text{ avec } \theta \in \mathbb{R}$$

2. **Si $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, alors $A \in \mathrm{O}_2^+(\mathbb{R})$**
3. **Si $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$, alors $A \in \mathrm{O}_2^-(\mathbb{R})$**

Démonstration

1. Toutes les matrices $A \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R})$ s'écrivent $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ ou $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$ avec $a^2 + b^2 = 1$
   De l'égalité $a^2 + b^2 = 1$, nous tirons l'inégalité $0 \leqslant a^2 \leqslant 1 \iff -1 \leqslant a \leqslant +1$
   Il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $a = \cos\theta$; en fait, ce θ n'est pas unique : il est défini à $2k\pi$ près.
2. Alors, comme $b^2 = 1 - a^2$, $b^2 = 1 - \cos^2\theta \iff b^2 = \sin^2\theta \iff |b| = |\sin\theta|$
   Nous obtenons alors plusieurs cas :

$$A_1 = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \quad A_4 = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ -\sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

   Nous pouvons faire remarquer que

$$A_2 = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix}$$

   et que $A_2 = A_1^{-1}$
   De même

$$A_4 = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ -\sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(-\theta) & \sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & -\cos(-\theta) \end{pmatrix}$$

   Nous avons $A_1 \in \mathrm{O}_2^+(\mathbb{R})$, $A_2 \in \mathrm{O}_2^+(\mathbb{R})$, $A_3 \in \mathrm{O}_2^-(\mathbb{R})$ et $A_4 \in \mathrm{O}_2^-(\mathbb{R})$

15.3.9 Proposition

E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2
Etant donnés 2 vecteurs u et v, non nuls et de même norme, alors :

1. **Il existe une et une seule rotation $\rho \in \mathrm{O}_2^+(\mathbb{R})$ tel que $\rho(u) = v$**
2. **Il existe une et une seule symétrie orthogonale $\sigma \in \mathrm{O}_2^-(\mathbb{R})$ tel que $\sigma(u) = v$**

Démonstration

1. On suppose $\|u\| = \|v\| = n$, et $n > 0$ puisqu'aucun des 2 vecteurs u et v ne sont nuls. En posant $u' = \frac{1}{n}u$ et $v' = \frac{1}{n}v$, nous nous ramenons à u et v tels que $\|u\| = \|v\| = 1$
2. Il existe un vecteur $u_1 \in E$ tel que $\mathcal{B}_1 = \{u, u_1\}$ soit une base orthonormée de E. Alors, $v = au + bu_1$ avec $a^2 + b^2 = 1$
   (a) Alors, si ρ est une rotation telle que $\mathcal{M}_{\mathcal{B}_1}(\rho) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, ρ est telle que $\rho(u) = v$
   (b) De même, si σ est une symétrie orthogonale telle que $\mathcal{M}_{\mathcal{B}_1}(\sigma) = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$, σ est telle que $\sigma(u) = v$

15.3.10 Exercices

Exercice 19 :

E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2 euclidien rapporté à une base orthonormée $\{i, j\}$. ρ et σ sont respectivement la rotation et la symétrie orthogonale transformant le vecteur u en le vecteur u', avec $\|u\| = \|u'\| \neq 0$
Déterminer les matrices de ρ et σ dans les cas suivants

1. $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $u' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
2. $u = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$ et $u' = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$
3. $u = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et $u' = \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}$

Exercice 20 :

E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien de dimension 2 rapporté à une base orthonormée $\{i, j\}$. Soit D une droite de E. Démontrer que si σ_D est la symétrie orthogonale par rapport à la droite D, alors $-\sigma_D$ est la symétrie orthogonale par rapport à la droite $D^\perp$

Exercice 21 :

E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien de dimension 2 rapporté à une base orthonormée $\{i, j\}$. On note Id_E l'application identique de E

1. Déterminer l'ensemble des rotations vectorielles ρ telles que $\rho^3 = \mathrm{Id}_E$
2. Démontrer que l'ensemble précédent, muni de la composition des applications, est un groupe commutatif. En donner la table de composition

Exercice 22 :

E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien de dimension 2 rapporté à une base orthonormée $\{i, j\}$. D et D_1 sont 2 droites vectorielles de E. On appelle σ_D et σ_{D_1} les symétries orthogonales respectives par rapport à D ou D_1

1. Démontrer l'équivalence : $(\sigma_D \circ \sigma_{D_1} = \sigma_{D_1} \circ \sigma_D) \Longleftrightarrow (D = D_1 \text{ ou } D \perp D_1)$
2. On suppose, dans cette question, les droites D et D_1 distinctes et $\sigma_D \circ \sigma_{D_1} = \sigma_{D_1} \circ \sigma_D$
   (a) Définir $\sigma_D \circ \sigma_{D_1}$
   (b) Quel est le plus petit sous-groupe orthogonal de $\mathrm{O}(E)$ contenant σ_D et σ_{D_1} ?

Exercice 23 :

E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien de dimension 2 rapporté à une base orthonormée $\{i, j\}$. D et D_1 sont 2 droites vectorielles de E. On appelle σ_D et σ_{D_1} les symétries orthogonales respectives par rapport à D ou D_1
$u \in D$ et $v \in D_1$ sont 2 vecteurs unitaires.
Démontrer que $\sigma_D + \sigma_{D_1}$ est une symétrie orthogonale par rapport à une droite Δ si et seulement si $|\langle u/v \rangle| = \frac{1}{2}$

Exercice 24 :

E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien de dimension 2 rapporté à une base orthonormée $\{i,j\}$ et soit $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E de matrice, dans la base $\{i,j\}$:

$$\mathcal{M}_{\{i,j\}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Démontrer qu'il existe un endomorphisme $\varphi^* \in \mathcal{L}(E)$ et un seul, tel que :
$$(\forall u \in E)(\forall v \in E)\left(\langle \varphi(u)/v\rangle = \langle u/\varphi^*(v)\rangle\right)$$
2. Déterminer la matrice de φ^* dans la base $\{i,j\}$

Exercice 25 :

E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien de dimension 2 rapporté à une base orthonormée $\{i,j\}$.
On donne les vecteurs $u = 3i + j$ et $v = \sqrt{2}i + \alpha j$ où $\alpha \in \mathbb{R}^{*+}$

1. (a) Comment faut-il choisir α pour qu'il existe une rotation vectorielle ρ telle que $\rho(u) = v$
   (b) Donner la matrice de ρ dans la base $\{i,j\}$
2. (a) On considère le vecteur $w = -i + 3j$. Montrez qu'il existe une symétrie orthogonale S et une seule, telle que $w = S \circ \rho(u)$
   (b) Donner la matrice de S dans la base $\{i,j\}$

Exercice 26 :

E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien de dimension 2. u_1 et u_2 sont 2 vecteurs linéairement indépendants de E et $\mathcal{S}$ est la symétrie orthogonale par rapport à la droite engendrée par $u_1 + u_2$. Il faut montrer que $\mathcal{S}(u_1) = u_2$

Exercice 27 :

On considère E, $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien de dimension 2 rapporté à une base orthonormée $\mathcal{B}_0 = \{i,j\}$ et ρ une rotation ayant pour matrice dans la base $\mathcal{B}_0$:

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}_0}(\rho) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

Etant donnée une droite D engendrée par le vecteur $u = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, définissant la symétrie orthogonale par rapport à D, S_D, trouvez la symétrie orthogonale Σ telle que $\Sigma \circ S_d = \rho$

Exercice 28 :

On considère E, $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien de dimension 2 rapporté à une base orthonormée $\mathcal{B}_0 = \{i,j\}$
On considère les vecteurs $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. u engendre la droite vectorielle D_u et v, la droite vectorielle D_v.
S_{D_u} est la symétrie orthogonale par rapport à D_u et S_{D_v} est la symétrie orthogonale par rapport à D_v.
Quelles sont les matrices des rotations vectorielles $\rho_1 = S_{D_v} \circ S_{D_u}$ et $\rho_2 = S_{D_u} \circ S_{D_v}$
Quelle relation existe-t-il entre ρ_1 et ρ_2 ?

Exercice 29 :

Soit E, $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien de dimension 2. On considère, dans E, trois vecteurs u, v et w tels que :

- u et v sont linéairement indépendants
- $u + v + w = \overrightarrow{0}$

On considère un endomorphisme L tel que :

$$\|L(u)\| = \|u\| \qquad \|L(v)\| = \|v\| \qquad \|L(w)\| = \|w\|$$

1. Démontrer que $\langle L(u) / L(v) \rangle = \langle u/v \rangle$
2. Démontrer que L est une transformation orthogonale de E

Exercice 30 :

Soit E, $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien de dimension 2 rapporté à une base orthonormée $\{i, j\}$.

On considère la rotation vectorielle ρ qui a pour matrice $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

Déterminer les matrices, dans la base $\{i, j\}$ des rotations vectorielles r telles que $r^2 = r \circ r = \rho$

Exercice 31 :

Soit E, $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien de dimension 2 rapporté à une base orthonormée $\{i, j\}$.

On considère les vecteurs $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et les droites D_u et D_v que ces vecteurs déterminent.

Quelles sont les matrices, dans la base orthonormée $\{i, j\}$ des transformations orthogonales L telles que $L(D_u) = D_v$