15.4 Groupe Orthogonal en dimension 3

Dans cette section, E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien de dimension 3 rapporté à une base orthonormée $\mathcal{B}_0 = \{i, j, k\}$

15.4.1 Proposition *(Rappel)*

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathrm{O}(E)$. On appelle F l'ensemble des vecteurs invariants par f, c'est à dire :

$$F = \{u \in E \text{ tels que } f(u) = u\}$$

Alors :

1. **F est un sous-espace vectoriel de E**
2. **$F^{\perp}$ est un sous-espace vectoriel stable par f, c'est à dire :**

$$\left(\forall u \in F^{\perp}\right)\left(f(u) \in F^{\perp}\right)$$

Démonstration

1. Montrons que F est un sous-espace vectoriel de E
   C'est une démonstration qui a déjà été faite.
   - ▷ Tout d'abord, $F \neq \emptyset$ puisque $\overrightarrow{0} \in F$; en effet, f étant linéaire, $f\left(\overrightarrow{0}\right) = \overrightarrow{0}$
   - ▷ Soient $u \in F$, $v \in F$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\mu \in \mathbb{R}$. Avons nous $\lambda u + \mu v \in F$?
     Pour cela, il faut regarder $f(\lambda u + \mu v)$
     - f étant linéaire, $f(\lambda u + \mu v) = \lambda f(u) + \mu f(v)$
     - Comme $u \in F$ et $v \in F$, $f(u) = u$ et $f(v) = v$
     - Donc, $f(\lambda u + \mu v) = \lambda f(u) + \mu f(v) = \lambda u + \mu v$

     Ainsi, $\lambda u + \mu v \in F$

   Et donc, F est un sous-espace vectoriel de E
2. Montrons que $F^{\perp}$ est un sous-espace vectoriel stable par f
   Soit $u \in F^{\perp}$; il faut donc démontrer que $f(u) \in F^{\perp}$, c'est à dire que, pour tout $v \in F$, $\langle f(u) / v\rangle = 0$.
   Comme $v \in F$, $f(v) = v$; Donc :
   $$\langle f(u) / v\rangle = \langle f(u) / f(v)\rangle = \langle u / v\rangle = 0$$
   Donc, $f(u) \in F^{\perp}$ et $F^{\perp}$ est un sous-espace vectoriel stable par f

Nous allons maintenant étudier les transformations orthogonale de E en considérant le sous-espace vectoriel des vecteurs invariants et sa dimension

15.4.2 Théorème : cas où $\dim F = 2$

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien de dimension 3 et $f \in \mathrm{O}(E)$
f est une symétrie orthogonale par rapport à un plan vectoriel de E si et seulement si le sous-espace vectoriel F des vecteurs invariants est de dimension 2

Démonstration

Nous ferons beaucoup référence à 15.2.9

1. Si $f \in \mathrm{O}(E)$ est une symétrie orthogonale par rapport à un plan, alors, le sous-espace vectoriel F des vecteurs invariants est de dimension 2

2. Réciproquement, supposons que le sous-espace vectoriel F des vecteurs invariants est de dimension 2
   Considérons $F^{\perp}$ qui est un sous-espace vectoriel supplémentaire de F, et donc $\dim F^{\perp} = 1$; c'est donc une droite vectorielle.
   Considérons, maintenant φ, la restriction de f à $F^{\perp}$, c'est à dire : $\varphi = f_{/F^{\perp}}$. Alors, φ est un endomorphisme orthogonal de la droite $F^{\perp}$, et il y a donc 2 possibilités : $\varphi = \mathrm{Id}_{/F^{\perp}}$ ou $\varphi = -\mathrm{Id}_{/F^{\perp}}$
   - ▷ Si $\varphi = \mathrm{Id}_{/F^{\perp}}$, alors $f = \mathrm{Id}_E$ et la dimension du sous-espace vectoriel des vecteurs invariants est 3 ; impossible.
   - ▷ Donc $\varphi = -\mathrm{Id}_{/F^{\perp}}$, et f apparaît bien comme étant une symétrie orthogonale par rapport à F

Exercice 32 :

Soit Δ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien de dimension 1 *(c'est à dire une droite vectorielle)*. Montrer que tout endomorphisme orthogonal de Δ *(c'est à dire tout $f \in \mathrm{O}(\Delta)$)* est du type $f = \mathrm{Id}_{\Delta}$ ou $f = -\mathrm{Id}_{\Delta}$

15.4.3 Proposition : cas où $\dim F = 1$

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien de dimension 3 et $f \in \mathrm{O}(E)$
Si le sous-espace vectoriel F des vecteurs invariants est de dimension 1, alors, la restriction de f à $F^{\perp}$ est une rotation plane différente de l'identité

Remarque 22 :

Autrement dit, $f_{/F^{\perp}} \in \mathrm{O}^{+}\left(F^{\perp}\right)$

Démonstration

Si $\dim F = 1$, alors, $\dim F^{\perp} = 2$ et $F^{\perp}$ est un plan.
Si $\varphi = f_{/F^{\perp}}$, alors φ est un endomorphisme orthogonal du plan $F^{\perp}$.
- ▷ Si $\varphi = \mathrm{Id}_{F^{\perp}}$ alors le sous-espace vectoriel des vecteurs invariants est E entier, ce qui est impossible
- ▷ Supposons maintenant que φ soit une symétrie orthogonale par rapport à une doite de $F^{\perp}$.
  Soit Δ cette droite de vecteur directeur u_{Δ}. Posons aussi u_F un vecteur directeur de F. Alors $\mathrm{vect}(\{u_F, \Delta\})$ qui est le sous-espace vectoriel engendré par F et Δ est un espace de dimension 2, de base $\{u_{\Delta}, u_F\}$ qui est lui aussi invariant par f, parce que u_F et u_{Δ} sont aussi invariants par f ; donc $\dim(\mathrm{vect}(\{u_F, \Delta\})) = 2$
  C'est impossible. Donc, φ ne peut être une symétrie orthogonale par rapport à une doite de $F^{\perp}$
- ▷ φ n'a d'autre choix que d'être une rotation du plan $F^{\perp}$

15.4.4 Définition de rotation en dimension 3

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien de dimension 3
On appelle rotation vectorielle de E

1. **Ou bien Id_E, l'application identique de E**
2. **Ou bien, un transformation orthogonale $R \in \mathrm{O}(E)$ dont la dimension du sous-espace vectoriel des vecteurs invariants est 1. Dans ce cas, le sous-espace vectoriel des vecteurs invariants est appelé axe de la rotation**

15.4.5 Théorème de décomposition d'une rotation

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien de dimension 3 et $\Delta \subset E$ une droite vectorielle de E
Alors, toute rotation vectorielle $R \in \mathrm{O}(E)$ peut se décomposer en un produit de 2 symétries orthogonales par rapport à des plans vectoriels contenant la droite Δ, l'une de ces symétries pouvant être choisie arbitrairement

Démonstration

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien de dimension 3 et R une rotation de E.
Soit Δ l'axe de cette rotation ; $\Delta^{\perp}$ est le plan orthogonal à Δ.
Quelques rappels :

1. $\Delta^{\perp}$ est globalement invariant par R
2. D'après 15.4.3, $\rho = R_{\diagup_{\Delta^{\perp}}}$ est une rotation plane

Soit (P) un plan vectoriel quelconque contenant Δ. Alors, l'intersection de (P) avec $\Delta^{\perp}$ est une droite que nous appelons (D) ; donc $(D) = (P) \cap \Delta^{\perp}$. Nous appellerons S_P, la symétrie orthogonale par rapport à (P). Il faut remarquer que la restriction de S_P à $\Delta^{\perp}$ est la symétrie orthogonale plane σ_D
Autre rappel :
D'après 15.3.6, toute rotation vectorielle plane peut se décomposer en un produit de 2 symétries orthogonales planes.
Il existe donc une droite $D_1 \subset \Delta^{\perp}$ telle que $R_{\diagup_{\Delta^{\perp}}} = \rho = \sigma_D \circ \sigma_{D_1}$, et cette droite D_1 est orthogonale à Δ puisqu'incluse dans $\Delta^{\perp}$
<u>Nous allons considérer l'endomorphisme orthogonal $S_P \circ R$</u>
Nous appelons (P') le plan vectoriel contenant D_1 et Δ ; en fait, ce plan vectoriel est unique et très bien déterminé par D_1 et Δ. Nous considérons aussi S'_P, la symétrie orthogonale par rapport au plan (P'). Il faut aussi remarquer que la restriction de S'_P à $\Delta^{\perp}$ est la symétrie orthogonale plane σ_{D_1}.
D'autre part, si u est une base de Δ et v une base de D_1 ;, la famille $\{u, v\}$ est une base de du plan vectoriel (P')

- ⋆ Pour u, base de Δ, nous avons
  - ▷ $S_P(u) = u$, car $u \in \Delta$ et $\Delta \subset (P)$
  - ▷ $R(u) = u$, car $u \in \Delta$ et Δ est le sous-espace vectoriel des vecteurs invariants par R

  Donc $S_P \circ R(u) = u$
- ⋆ Pour v, base de D_1
  - ▷ Comme $v \in D_1$, que $D_1 \subset \Delta^{\perp}$, $R(v) = \sigma_D \circ \sigma_{D_1}(v) = \sigma_D(v)$, et $\sigma_D(v) \in \Delta^{\perp}$
  - ▷ Donc, $S_P \circ R(v) = S_P \circ \sigma_D(v)$. Comme $\sigma_D(v) \in \Delta^{\perp}$, que la restriction de S_P à $\Delta^{\perp}$ est la symétrie orthogonale plane σ_D, nous avons : $S_P \circ R(v) = S_P \circ \sigma_D(v) = \sigma_D \circ \sigma_D(v) = v$
  - ▷ v apparaît donc comme un vecteur invariant de $S_P \circ R$

Ainsi, si u et v sont invariants par $S_P \circ R$, la famille $\{u, v\}$ étant une base de du plan vectoriel (P'), tout le plan (P') est invariant par $S_P \circ R$, endomorphisme orthogonal. Ainsi, d'après 15.4.2 $S_P \circ R$ est une symétrie orthogonale. C'est la symétrie orthogonale par rapport au plan vectoriel (P'). Donc :

$$S_P \circ R = S'_P \iff R = S_p \circ S'_P$$

Ce que nous voulions

15.4.6 Théorème

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien de dimension 3. Alors
La composée de 2 symétries orthogonales planes de E est une rotation vectorielle de E

Démonstration

Soient P_1 et P_2 2 plans de E, S_{P_1}, la symétrie orthogonale par rapport à P_1 et S_{P_2}, la symétrie orthogonale par rapport à P_2. Nous allons donc étudier $S_{P_1} \circ S_{P_2}$

1. Si $P_1 = P_2$, alors $S_{P_1} \circ S_{P_2} = \mathrm{Id}_E$ qui est bien une rotation
2. Supposons maintenant $P_1 \neq P_2$ et appelons $\Delta = P_1 \cap P_2$
   (a) Si $u \in \Delta$, alors $u \in P_1$ et $u \in P_2$ et donc $S_{P_1} \circ S_{P_2}(u) = u$. C'est à dire que tous les vecteurs de Δ sont invariants
   (b) Réciproquement, soit u un vecteur invariant par $S_{P_1} \circ S_{P_2}$.
   Δ et $\Delta^{\perp}$ étant des sous-espace vectoriel supplémentaires, nous pouvons écrire $u = u_{\Delta} + u_{\Delta^{\perp}}$.
   Donc :

$$u = S_{P_1} \circ S_{P_2}(u) = S_{P_1} \circ S_{P_2}(u_{\Delta}) + S_{P_1} \circ S_{P_2}(u_{\Delta^{\perp}}) = u_{\Delta} + S_{P_1} \circ S_{P_2}(u_{\Delta^{\perp}})$$

De l'égalité $u = S_{P_1} \circ S_{P_2}(u)$, nous déduisons $u_\Delta + u_{\Delta^\perp} = u_\Delta + S_{P_1} \circ S_{P_2}(u_{\Delta^\perp})$, c'est à dire $u_{\Delta^\perp} = S_{P_1} \circ S_{P_2}(u_{\Delta^\perp})$; $u_{\Delta^\perp}$ est donc aussi invariant par $S_{P_1} \circ S_{P_2}$

Nous appellons σ_1 la restriction de S_{P_1} à $\Delta^\perp$ et σ_2 la restriction de S_{P_2} à $\Delta^\perp$. Nous appelons aussi $D_1 = P_1 \cap \Delta^\perp$ et $D_2 = P_2 \cap \Delta^\perp$.

Les vecteurs de D_1 sont invariants par S_{P_1} et σ_1 est donc la symétrie orthogonale par rapport à D_1 ; de même pour D_2 et σ_2.

Donc, $u_{\Delta^\perp} = S_{P_1} \circ S_{P_2}(u_{\Delta^\perp}) = \sigma_1 \circ \sigma_2(u_{\Delta^\perp})$. Or, comme $\sigma_1 \circ \sigma_2 \in \mathrm{O}^+\left(\Delta^\perp\right)$, et le seul vecteur invariant, dans $\Delta^\perp$ de $\sigma_1 \circ \sigma_2$ est le seul vecteur nul $\overrightarrow{0}$, et donc $u_{\Delta^\perp} = \overrightarrow{0}$.

Ainsi, si u est invariant par $S_{P_1} \circ S_{P_2}$, alors $u = u_\Delta$ et donc $u \in \Delta$

Donc, Δ est le sous-espace vectoriel des vecteurs invariants par $S_{P_1} \circ S_{P_2}$ et $S_{P_1} \circ S_{P_2}$ est une rotation d'axe Δ

15.4.7 Théorème

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien de dimension 3.
L'ensemble des rotations vectorielles de E, noté $\mathrm{O}^+(E)$ est un sous-groupe de $\mathrm{O}(E)$, groupe des endomorphismes orthogonaux de E

Démonstration

1. Tout d'abord, $\mathrm{O}^+(E) \neq \emptyset$ puisque $\mathrm{Id}_E \in \mathrm{O}^+(E)$
2. Montrons que la composition des rotations de $\mathrm{O}^+(E)$ est interne.
   Soient $R_1 \in \mathrm{O}^+(E)$ et $R_2 \in \mathrm{O}^+(E)$. Nous allons montrer que $R_1 \circ R_2 \in \mathrm{O}^+(E)$
   Soit Δ_1 l'axe de la rotation R_1 et Δ_2 celui de la rotation R_1. On appelle P, le plan contenant Δ_1 et Δ_2. D'après 15.4.5, nous pouvons écrire :
   $$R_1 = S_\Pi \circ S_P \quad \text{et} \quad R_2 = S_P \circ S_{\Pi_1}$$
   Donc :
   $$R_1 \circ R_2 = (S_\Pi \circ S_P) \circ (S_P \circ S_{\Pi_1}) = S_\Pi \circ (S_P \circ S_P) \circ S_{\Pi_1} = S_\Pi \circ S_{\Pi_1}$$
   Ainsi, $R_1 \circ R_2$ est la composée de 2 symétries orthogonales planes et est donc une rotation
3. L'inverse d'une rotation est une rotation
   Soient $R \in \mathrm{O}^+(E)$; d'après 15.4.5, il existe 2 plans P_1 et P_2 tels que $R = S_{P_1} \circ S_{P_2}$. Alors :
   $$R^{-1} = (S_{P_2})^{-1} \circ (S_{P_1})^{-1} = S_{P_2} \circ S_{P_1}$$
   R^{-1} est donc une rotation

Remarque 23 :

Il est évident que la composition **d'un nombre pair** de symétries orthogonales est une rotation de $\mathrm{O}^+(E)$

15.4.8 Définition

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien de dimension 3. Soit $\Delta \subset E$ une droite vectorielle de E
On appelle retournement ou demi-tour d'axe Δ la symétrie orthogonale d'axe Δ
Un retournement est donc une rotation

15.4.9 Cas où $\dim F = 0$

C'est donc le cas où $F = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien de dimension 3 et $\varphi \in \mathrm{O}(E)$ qui admet $\overrightarrow{0}$ comme seul vecteur invariant. Alors :
φ est la composée de 3 symétries orthogonales de E

Démonstration

Soit $u \in E$ un vecteur de E non nul et considérons $\varphi(u)$
$\varphi(u) \neq u$ et, comme $\varphi \in \mathrm{O}(E)$, nous avons $\|\varphi(u)\| = \|u\|$
Il existe une symétrie orthogonale place σ_P telle que $\sigma_p(u) = \varphi(u)$, et nous avons :

$$\sigma_P(\varphi(u)) = u \Longleftrightarrow \sigma_P \circ \varphi(u) = u$$

En fait, c'est assez simple!!
Si Π_P est la projection orthogonale sur P, alors, pour tout $w \in E$:
* $w = \Pi_P(w) + (w - \Pi_P(w))$
* $\sigma_P(w) = 2\Pi_P(w) - w$

De telle sorte que $w - \sigma_P(w) = 2(w - \Pi_P(w))$. Or, $w - \Pi_P(w) \in P^{\perp}$
Donc, pour notre $u \in E$, choisi, $P = (u - \varphi(u))^{\perp}$

C'est à dire que u est un vecteur invariant par $\sigma_P \circ \varphi$ et $\sigma_P \circ \varphi \in \mathrm{O}(E)$
La droite Δ engendrée par u est, elle aussi invariante par $\sigma_P \circ \varphi$. Appelons, comme jusqu'ici, F le sous-espace vectoriel des vecteurs invariants par $\sigma_P \circ \varphi$; alors $\dim F \geqslant 1$

- ▷ Nous ne pouvons avoir $\dim F = 3$ puisqu'alors $\sigma_P \circ \varphi = \mathrm{Id}_E$ et donc $\varphi = \sigma_P$, ce qui est impossible
- ▷ Nous ne pouvons pas plus avoir $\dim F = 2$ puisqu'alors $\sigma_P \circ \varphi$ est une symétrie orthogonale σ_Π par rapport à un plan Π de E et de $\sigma_P \circ \varphi = \sigma_\Pi$, nous déduisons que $\varphi = \sigma_P \circ \sigma_\Pi$;φ apparaît alors comme la composée de 2 symétries orthogonales planes et est donc une rotation ; ce qui est contradictoire avec le fait que φ n'admet que $\overrightarrow{0}$ comme seul vecteur invariant.

Donc $\dim F = 1$, et donc $\sigma_P \circ \varphi$ est une rotation. Une rotation se décompose en 2 symétries orthogonales planes. Nous avons donc :

$$\sigma_P \circ \varphi = S_{P_1} \circ S_{P_2} \Longleftrightarrow \varphi = \sigma_P \circ S_{P_1} \circ S_{P_2}$$

φ est donc la composéede 3 symétries orthogonales planes ; ce que nous voulions

15.4.10 Corollaire

Si φ est une transformation orthogonale de $\mathrm{O}(E)$ n'admettant que $\overrightarrow{0}$ comme seul vecteur invariant alors $\varphi^2 = \varphi \circ \varphi$ est une rotation

Démonstration

En effet, d'après 15.4.9, φ peut se décomposer en le produit de 3 symétries orthogonales planes ; $\varphi^2 = \varphi \circ \varphi$ se décompose en le produit de 6 symétries orthogonales planes *(un nombre pair de symétries orthogonales)* ; c'est donc une rotation.

15.4.11 Proposition

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien de dimension 3. Soit $\Delta \subset E$ une droite de E et $P = \Delta^{\perp}$ le plan orthogonal à Δ
On appelle R_Δ la rotation d'axe Δ et S_P la symétrie orthogonale par rapport à P. Alors :

$$R_\Delta \circ S_P = S_P \circ R_\Delta$$

C'est à dire que la rotation d'axe Δ et la symétrie orthogonale par rapport à $P = \Delta^{\perp}$ commutent

Démonstration

Soit $\{i\}$ un vecteur normé qui est une base de Δ et $\{j, k\}$ une base orthonormée de P.
Comme $\langle i/j \rangle = \langle i/k \rangle = \langle k/j \rangle = 0$, ces 3 vecteurs sont linéairement indépendants et forment une base de E.
Nous avons :

- $R_\Delta(i) = i$
- $R_\Delta(j) \in P$
- $R_\Delta(k) \in P$
- $S_P(i) = -i$
- $S_P(j) = j$
- $S_P(k) = k$

1. **Etudions** $R_\Delta \circ S_P$
   (a) $R_\Delta \circ S_P(i) = R_\Delta[S_P(i)] = R_\Delta[-i] = -R_\Delta[i] = -i$
   (b) $R_\Delta \circ S_P(j) = R_\Delta[S_P(j)] = R_\Delta[j]$
   (c) $R_\Delta \circ S_P(k) = R_\Delta[S_P(k)] = R_\Delta[k]$
2. **Etudions** $S_P \circ R_\Delta$
   (a) $S_P \circ R_\Delta(i) = S_P[R_\Delta(i)] = S_P[i] = -i$
   (b) $S_P \circ R_\Delta(j) = S_P[R_\Delta(j)] = R_\Delta(j)$ car $R_\Delta(j) \in P$
   (c) $S_P \circ R_\Delta(k) = S_P[R_\Delta(k)] = R_\Delta(k)$ car $R_\Delta(k) \in P$
3. **Conclusion**
   Nous avons :

   ▷ $R_\Delta \circ S_P(i) = S_P \circ R_\Delta(i)$ ▷ $R_\Delta \circ S_P(j) = S_P \circ R_\Delta(j)$ ▷ $R_\Delta \circ S_P(k) = S_P \circ R_\Delta(k)$

   Nous avons donc, pour tout $u \in E$, $R_\Delta \circ S_P(u) = S_P \circ R_\Delta(u)$, c'est à dire $R_\Delta \circ S_P = S_P \circ R_\Delta$

15.4.12 Théorème

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien de dimension 3 et $\varphi \in \mathrm{O}(E)$, telle que $\varphi \neq -\mathrm{Id}_E$ qui admet $\overrightarrow{0}$ comme seul vecteur invariant. Alors :
φ est, de manière unique, la composée d'une rotation et d'une symétries orthogonales plane de E
L'axe de la rotation et le plan de la symétrie orthogonale sont orthogonaux. Ces deux transformations sont donc permutables

Démonstration

1. **Existence**
   D'après 15.4.10, φ^2 est une rotation vectorielle d'axe Δ. Soit $u \in \Delta$ une base de Δ.
   On appelle σ_P, la symétrie orthogonale plane par rapport au plan P telle que $\sigma_P(u) = \varphi(u)$; en fait, σ_P échange u et $\varphi(u)$ et $P = \{u - \varphi(u)\}^\perp$
   Alors, comme dans 15.4.9, $\varphi \circ \sigma_P$ est une rotation vectorielle ρ, d'axe Δ, puisque :
   $$\rho(u) = \varphi \circ \sigma_P(u) = \varphi[\sigma_P(u)] = \varphi[\varphi(u)] = \varphi^2(u) = u$$
   D'autre part :
   $$\rho[\varphi(u)] = \varphi \circ \sigma_P[\varphi(u)] = \varphi[\sigma_P[\varphi(u)]] = \varphi(u)$$
   Ce qui montre que $\varphi(u)$ est invariant par ρ et donc que $\varphi(u) \in \Delta$
   Ainsi, le plan P est-il le plan orthogonal à Δ
   De l'égalité $\rho = \varphi \circ \sigma_P$, nous déduisons $\varphi = \rho \circ \sigma_P$ et de 15.4.11, nous avons aussi $\varphi = \sigma_P \circ \rho$
2. **Unicité**
   Supposons que $\varphi = \sigma \circ \rho$ où σ est une symétrie orthogonale par rapport à un plan P et ρ une rotation d'axe D tel que $P = D^\perp$.
   Pour $x \in D$, nous avons $\varphi(x) = \rho \circ \sigma_P(x) = \rho(-x) = -\rho(x) = -x$, et donc $\varphi^2(x) = \varphi \circ \varphi(x) = x$
   D'après 15.4.10, φ^2 est une rotation vectorielle.
   (a) Premièrement, $\varphi^2 \neq \mathrm{Id}_E$, car si $\varphi^2 = \mathrm{Id}_E$, comme $\varphi \in \mathrm{O}(E)$, alors $\varphi = \mathrm{Id}_E$ ou $\varphi = -\mathrm{Id}_E$, ce qui n'est pas possible
   (b) Comme $\varphi^2(x) = \varphi \circ \varphi(x) = x$, φ^2 est une rotation vectorielle d'axe D
   Ainsi, le choix de l'axe de la rotation et de l'axe de la rotation est entièrement déterminé par φ *(ou φ^2)* et est donc unique, de même que $P = D^\perp$
   Ainsi, ρ et σ_P sont-ils uniques.

15.5 Groupe Orthogonal en dimension 3 : le point de vue matriciel

15.5.1 Théorème

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien de dimension 3. Soit φ un endomorphisme orthogonal de E,c'est à dire $\varphi \in \mathrm{O}(E)$.

1. **Si φ admet au moins un vecteur non nul invariant, alors il existe une base orthonormée $\{i, j, k\}$ dans laquelle la matrice A de φ est de la forme :**

$$R = \begin{pmatrix} a & -b & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ ou } S = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ b & -a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   Avec $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ et $a^2 + b^2 = 1$

2. **Si la matrice A de φ est de la forme R, le sous-espace vectoriel des vecteurs invariants est de dimension 1 ou 3 et φ est donc une rotation**
3. **Si la matrice A de φ est de la forme S, le sous-espace vectoriel des vecteurs invariants est de dimension 2 et φ est donc une symétrie orthogonale par rapport à un plan P**

<u>Démonstration</u>

Soit u ce vecteur non nul invariant. Alors, la droite $\overrightarrow{D}$ engendrée par u est, elle aussi invariante par φ. On appelle $k = \dfrac{1}{\|u\|}u$; alors k est un vecteur unitaire générant aussi la droite $\overrightarrow{D}$. Appellons $\overrightarrow{P} = \overrightarrow{D}^{\perp}$

- ▷ $\overrightarrow{P}$ est invariant par φ, en ce sens que si $v \in \overrightarrow{P}$, alors $\varphi(v) \in \overrightarrow{P}$
- ▷ Soit $\Psi : \overrightarrow{P} \longrightarrow \overrightarrow{P}$ ainsi définie :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \Psi : \overrightarrow{P} & \longrightarrow & \overrightarrow{P} \\ u & \longmapsto & \Psi(u) = \varphi(u) \end{array} \right.$$

  En fait, Ψ est la restriction de φ à $\overrightarrow{P}$
- ▷ Ψ est un endomorphisme orthogonal de $\overrightarrow{P}$; nous avons donc 2 possibilités :
  - ⋆ Ou bien $\Psi \in \mathrm{O}^{+}\left(\overrightarrow{P}\right)$ et Ψ est une rotation vectorielle de $\overrightarrow{P}$
  - ⋆ Ou bien $\Psi \in \mathrm{O}^{-}\left(\overrightarrow{P}\right)$ et Ψ est une symétrie orthogonale par rapport à une droite $\Delta \in \overrightarrow{P}$

1. <u>**Supposons que Ψ soit une rotation vectorielle de $\overrightarrow{P}$**</u>

   Il existe alors une base orthonormée $\{i, j\}$ de $\overrightarrow{P}$ telle que la matrice de Ψ dans cette base $\{i, j\}$ soit $M = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ avec $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ et $a^2 + b^2 = 1$

   Il est bien évident que la famille $\{i, j, k\}$ forme une base orthonomée de E.
   - <u>Quelle est la matrice de φ dans cette base $\{i, j, k\}$?</u>
     Nous avons : $\varphi(k) = k$, $\varphi(i) = \Psi(i) = ai + bj$ et $\varphi(j) = \Psi(j) = -bi + aj$, de telle sorte que la matrice de φ dans cette base $\{i, j, k\}$ est :

$$M = \begin{pmatrix} a & -b & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   - <u>Recherche des points invariants de φ</u>
     En utilisant le calcul matriciel, nous avons :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rl} x = & ax - by \\ y = & bx + ay \\ z = & z \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rl} (a-1)x - by = & 0 \\ bx + (a-1)y = & 0 \\ z = & z \end{array} \right.$$

En ne retenant que les deux premières lignes du système, nous obtenons un sous-système :

$$\begin{cases} (a-1)\,x - by = & 0 \\ bx + (a-1)\,y = & 0 \end{cases}$$

Dont le déterminant est donné par $\delta = \begin{vmatrix} (a-1) & -b \\ b & (a-1) \end{vmatrix} = (a-1)^2 + b^2$.

- ◇ Ce déterminant δ ne s'annule que si et seulement si $a = 1$ et $b = 0$, et à ce moment là, le système admet une infinité de solutions. La matrice M est donc :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{I}_3$$

  C'est l'application identique, et E en entier est l'ensemble des vecteurs invariants
- ◇ Si $a \neq 1$ ou $b \neq 0$, alors $\delta \neq 0$ et le ssolutions du système sont de la forme $(0,0,z)$. Seule la droite $\overrightarrow{D}$ est invariante et la dimension du sous-espace vectoriel des vecteurs invariants par φ est donc 1

2. **Supposons que Ψ soit une symétrie orthogonale parr apport à une droite $\Delta \in \overrightarrow{P}$**

   Il existe un vecteur unitaire j_1 base de Δ telle que $\Psi(j_1) = j_1$.

   Soit $i_1 \in\in \overrightarrow{P}$, unitaire, tel que $\Psi(i_1) = -i_1$; nous avons $\langle i_1/j_1\rangle = 0$

   Donc :

$$\begin{cases} \varphi(i_1) = & \Psi(i_1) = -i_1 \\ \varphi(j_1) = & \Psi(j_1) = j_1 \\ \varphi(k) = & k \end{cases}$$

   La matrice de φ dans la base $\{i_1, j_1, k\}$ est :

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   φ transforme donc la base orthonormée $\{i_1, j_1, k\}$ en la base orthonormée $\{-i_1, j_1, k\}$ et laisse le plan engendré par $\{j_1, k\}$ invariant. la dimension du sous-espace vectoriel des vecteurs invariants est donc 2 ; φ est la symétrie orthogonale par rapport au plan engendré par $\{j_1, k\}$

   Il existe une base $\{e_1, e_2\}$ de $\overrightarrow{P}$ dans laquelle, la matrice de Ψ est donnée par $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$

   Il existe donc une base orthonormée de E dans laquelle la matrice de φ peut s'écrire $\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ b & -a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Remarque 24 :

1. Nous venons de montrer que si $\varphi \in \mathrm{O}(E)$ est une symétrie orthogonale plane, alors la matrice de φ est semblable à la matrice $M = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
2. On note $\mathrm{O}^+(E)$ l'ensemble des endomorphismes orthogonaux qui sont des rotations vectorielles ; on les appelle les isométries positives.
3. On note $\mathrm{O}^-(E)$ l'ensemble des endomorphismes orthogonaux qui ne sont pas des rotations vectorielles ; ce sont les isométries négatives
4. Ainsi :
   - ⋆ Ainsi, une symétrie orthogonale par rapport à une droite vectorielle est une rotation.
   - ⋆ Une symétrie orthogonale par rapport à un plan vectoriel est une isométrie négative.
   - ⋆ $-\mathrm{Id}_E$ est aussi une isométrie négative

5. Il est facile de démontrer que :

   $\varphi \in \mathrm{O}(E)$ **est une rotation vectorielle si et seulement si**
   Il existe une base orthonormée $\{i, j, k\}$ **dans laquelle, la matrice de** φ **est donnée par :**

$$M = \begin{pmatrix} a & -b & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ avec } a^2 + b^2 = 1$$

   On remarque que $\det M = 1$

6. Il est tout aussi facile de démontrer que :

   $\varphi \in \mathrm{O}(E)$ **est une symétrie orthogonale par rapport à un plan si et seulement si**
   Il existe une base orthonormée $\{i, j, k\}$ **dans laquelle, la matrice de** φ **est donnée par :**

$$M = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ b & -a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ avec } a^2 + b^2 = 1$$

   On remarque que $\det M = -1$

7. La composition de 2 isométries négatives donne une isométrie positive *(rotation)*

Exercice 33 :

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3 rapporté à une base orthonormée $\{i, j, k\}$. Soit φ dont la matrice dans la base $\{i, j, k\}$ est :

$$M = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -8 & 4 & 1 \\ 4 & 7 & 4 \\ 1 & 4 & -8 \end{pmatrix}$$

Il faut démontrer que φ est une rotation vectorielle

Corrigé

1. φ est un endomorphisme orthogonal

   En lisant la matrice, nous connaissons les coordonnées de $\varphi(i)$, $\varphi(j)$, $\varphi(k)$:

$$\varphi(i) = \begin{pmatrix} -\frac{8}{9} \\ \frac{4}{9} \\ \frac{1}{9} \end{pmatrix} \qquad \varphi(j) = \begin{pmatrix} -\frac{4}{9} \\ \frac{7}{9} \\ \frac{4}{9} \end{pmatrix} \qquad \varphi(k) = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} \\ \frac{4}{9} \\ -\frac{8}{9} \end{pmatrix}$$

   Il est tout à fait facile de vérifier, par le calcul que :

$$\|\varphi(i)\| = \|\varphi(j)\| = \|\varphi(k)\| = 1$$

   Et

$$\langle \varphi(i) / \varphi(j) \rangle = \langle \varphi(i) / \varphi(k) \rangle = \langle \varphi(k) / \varphi(j) \rangle = 0$$

   Nous avons donc $\{\varphi(i), \varphi(j), \varphi(k)\}$ base orthonormée de E et, φ transformant une base orthonormée de E en une autre base orthonormée de E est bien un endomorphisme orthogonal de E

2. φ est une rotation vectorielle

   La définition analytique de cet endormorphisme orthogonal est donnée par :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -8 & 4 & 1 \\ 4 & 7 & 4 \\ 1 & 4 & -8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} x' = \frac{1}{9}(-8x + 4y + z) \\ y' = \frac{1}{9}(4x + 7y + 4z) \\ z' = \frac{1}{9}(x + 4y - 8z) \end{cases}$$

Soit $\overrightarrow{I}$ le sous-espace vectoriel des vecteurs invariants par φ.Pour $u \in \overrightarrow{I}$, les coordonnées de u vérifient :

$$x' = x \qquad y' = y \qquad z' = z$$

Ce qui nous donne donc le système :

$$\left\{\begin{array}{rl} x = & \frac{1}{9}\left(-8x+4y+z\right) \\ y = & \frac{1}{9}\left(4x+7y+4z\right) \\ z = & \frac{1}{9}\left(x+4y-8z\right) \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rl} 17x-4y-z = & 0 \\ 2x-y+2z = & 0 \\ x+4y-17z = & 0 \end{array}\right.$$

En prenant la première équation, nous avons : $z = 17x - 4y$, et en remplaçant z par sa valeur dans les deux autres équations, nous obtenons :

$$\left\{\begin{array}{rl} 17x-4y = & z \\ 2x-y+2\left(17x-4y\right) = & 0 \\ x+4y-17\left(17x-4y\right) = & 0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rl} 17x-4y = & z \\ 36x-9y = & 0 \\ -288x+72y = & 0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rl} 17x-4y = & z \\ 4x-y = & 0 \\ -4x+y = & 0 \end{array}\right.$$

Nous en tirons donc $y = 4x$ et $z = x$

Il en résulte donc que $\overrightarrow{I}$ est un sous-espace vectoriel de dimension 1, de base $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ et φ est une rotation vectorielle de E

15.5.2 Quelques exercices

Exercice 34 :

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3 rapporté à une base orthonormée $\{i, j, k\}$. Soit φ dont la matrice dans la base $\{i, j, k\}$ est :

$$M = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Démontrer que φ est une rotation vectorielle
2. Déterminer une base orthonormée $\{i', j', k'\}$ de E telle que le vecteur k' soit invariant par φ.
3. Quelle est la matrice de φ dans la base $\{i', j', k'\}$?

Exercice 35 :

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3. Trouvez toutes les rotations vectorielles involutives de E

Exercice 36 :

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3 rapporté à une base orthonormée $\{i, j, k\}$. Soit σ dont la matrice dans la base $\{i, j, k\}$ est :

$$M = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 7 & -4 & 4 \\ -4 & 1 & 8 \\ 4 & 8 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Démontrer que σ est une symétrie orthogonale par rapport à un plan $\overrightarrow{P}$
2. Déterminer une base orthonormée $\{i', j', k'\}$ de E dans laquelle la matrice de σ soit :

$$\mathcal{M}_{\{i',j',k'\}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercice 37 :

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3. $\overrightarrow{P}$ étant un plan vectoriel inclus dans E, on désigne par $\sigma_{\overrightarrow{P}}$ la symétrie orthogonale par rapport à $\overrightarrow{P}$.
Démontrer que $-\sigma_{\overrightarrow{P}}$ est la symétrie orthogonale par rapport à $D = \overrightarrow{P}^{\perp}$

Exercice 38 :

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3. D et D_1 sont 2 droites vectorielles incluses dans E ; on désigne par σ_D la symétrie orthogonale par rapport à D et σ_{D_1} la symétrie orthogonale par rapport à D_1

1. Démontrer l'équivalence suivante :
$$\sigma_{D_1} \circ \sigma_D = \sigma_D \circ \sigma_{D_1} \Longleftrightarrow (D = D_1 \text{ ou } D \perp D_1)$$
2. Déduire de la question précédente que le groupe des rotations de E n'est pas commutatif

Exercice 39 :

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3 et D une droite vectorielle incluse dans E.
Démontrer que l'ensemble des rotations vectorielles φ de E telles que $\varphi(D) = D$ est un sous-groupe de $\mathrm{O}^+(E)$, groupe des rotations de E. Ce groupe est-il commutatif ?

Exercice 40 :

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3. Soient u et v, 2 vecteurs de E tels que $\|u\| = \|v\|$
Démontrer qu'une droite vectorielle Δ est l'axe d'une rotation vectorielle ρ telle que $\rho(u) = v$ si et seulement si Δ appartient au plan vectoriel orthogonal à $u - v$

Exercice 41 :

Soit E, $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien de dimension 3 rapporté à une base orthonormée $\{i, j, k\}$. On note r le retournement ayant pour axe la droite D engendrée par le vecteur $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

1. Pour tout vecteur $v \in E$ démontrer que $r' = v(r)$ est caractérisée par :
   (a) $\langle v' - v/u \rangle = 0$
   (b) Les vecteurs $v' + v$ et u sont linéairement indépendants
2. En déduire les coordonnées de v' en fonction de celles de v
3. Quelle est la matrice de r ?

Exercice 42 :

Soit E, $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien de dimension 3 rapporté à une base orthonormée $\{i, j, k\}$.
On considère le plan vectoriel P engendrée par les vecteur $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
On appelle S_P la symétrie orthogonale par rapport à P

1. Montrer que, pour tout vecteur $x \in E$, l'image $x' = S_P(x)$ par la symétrie orthogonale S_P est caractérisée par :
   (a) $\langle x' - x/u \rangle = 0$ et $\langle x' - x/v \rangle = 0$
   (b) Les vecteurs $v' + v$, u et v sont linéairement indépendants
2. En déduire les coordonnées de x' en fonction de celles de x
3. Quelle est la matrice de S_P ?

Exercice 43 :

Soit E, $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien de dimension 3 rapporté à une base orthonormée $\{i, j, k\}$.

On considère le vecteur $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $H = u^{\perp}$

Donner la matrice de S_H, la symétrie orthogonale par rapport à H

Exercice 44 :

Soit E, $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien de dimension 3 rapporté à une base orthonormée $\{i, j, k\}$.

1. Montrer que la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\dfrac{1}{\sqrt{3}} & \dfrac{2}{\sqrt{6}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{3}} & \dfrac{1}{\sqrt{6}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} & -\dfrac{1}{\sqrt{3}} & -\dfrac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$
est, dans la base $\{i, j, k\}$ la matrice d'une transformation orthogonale f de E
2. Montrer que f admet $\overrightarrow{0}$ comme seul vecteur invariant
3. De la question précédente et d'après 15.4.12, f peut s'écrire, et de manière unique, $f = \rho \circ \sigma$ où ρ est une rotation, σ une symétrie orthogonale. L'axe de ρ est orthogonal au plan de la symétrie σ
   (a) Déterminer un vecteur directeur de l'axe de la rotation ρ *(Rappel : l'axe de ρ est celui de la rotation vectorielle f^2)*
   (b) Montrer que, pour tout $v \in E$, l'image $v' = \sigma(v)$ d'un vecteur v par σ est caractérisée par :
   - $v' - v$ et u sont linéairement dépendants
   - $\langle v + v'/u \rangle = 0$

   (c) Déterminer la matrice de σ dans la base orthonormée $\{i, j, k\}$
   (d) En déduire la matrice de ρ dans la base orthonormée $\{i, j, k\}$