15.6 Exercices pour aller plus loin

Exercice 45 :

1. E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien de dimension 3, rapporté à une base $\{u, v, w\}$. Construire, à partir de la base $\{u, v, w\}$ une base orthonormée $\{u_1, v_1, w_1\}$
2. $\mathbb{R}_2[X]$ est le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 2
   (a) On construit, dans $\mathbb{R}_2[X]$, l'application Φ définie par :

$$\begin{cases} \Phi : \mathbb{R}_2[X] \times \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (P, Q) & \longmapsto & \Phi[(P, Q)] = \displaystyle\int_{-1}^{+1} P(t) Q(t)\, dt \end{cases}$$

   Montrer que Φ est un produit scalaire
   (b) On considère la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ définie par $\{P_0, P_1, P_2\}$ où :

$$P_0(t) = 1 \qquad P_1(t) = t \qquad P_2(t) = t^2$$

   Construire, à partir de la base $\{P_0, P_1, P_2\}$ une base orthonormée $\{P'_0, P'_1, P'_2\}$ relativement au produit scalaire défini par Φ

Exercice 46 :

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E vérifiant :

$$(\forall (x, y) \in E \times E)\, (\langle x/u(y) \rangle = \langle u(x)/y \rangle)$$

On suppose, de plus, que pour tout $x \neq \overrightarrow{0}$, $\langle x/u(x) \rangle > 0$

1. On considère l'application Φ définie par :

$$\begin{cases} \Phi : E \times E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & \Phi[(x, y)] = \langle x/u(y) \rangle \end{cases}$$

   Démontrer que Φ est un produit scalaire sur E
2. Etablir l'inégalité vraie pour tout $x \in E$:

$$\|u(x)\|^4 \leqslant \langle u(x)/x \rangle \left\langle u^2(x)/u(x) \right\rangle$$

Exercice 47 :

1. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien de dimension 3, rapporté à une base $\{i, j, k\}$
   Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\{i, j, k\}$ est donnée par :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

   Démontrer que l'endomorphisme φ^* dont la matrice dans la base $\{i, j, k\}$ est A^T, la transposée de A est tel que :

$$(\forall u \in E)\, (\forall v \in E)\, (\langle \varphi(u)/v \rangle = \langle u/\varphi^*(v) \rangle)$$

   Démontrer que φ^* est le seul endomorphisme de E vérifiant cette propriété.
2. En généralisant, nous prenons E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien de dimension finie n et $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E.
   (a) Montrer que l'on peut définir un endomorphisme $\widetilde{u}$ de E en posant, pour tout $x \in E$ et tout $y \in E$:

$$\langle x/u(y) \rangle = \langle \widetilde{u}(x)/y \rangle$$

(b) Etablir que les propriétés suivantes sont équivalentes :
   i. $u \circ \widetilde{u} = \widetilde{u} \circ u$
   ii. Pour tout $x \in E$ et tout $y \in E$, $\langle u(x) / u(y) \rangle = \langle \widetilde{u}(x) / \widetilde{u}(y) \rangle$
   iii. Pour tout $x \in E$, nous avons $\|u(x)\| = \|\widetilde{u}(x)\|$

(c) Démontrer que pour tout endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ et $v \in \mathcal{L}(E)$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\widetilde{u+v} = \widetilde{u} + \widetilde{v} \qquad \widetilde{\lambda u} = \lambda \widetilde{u} \qquad \widetilde{u \circ v} = \widetilde{v} \circ \widetilde{u}$$

(d) Soit φ un automorphisme de E *(C'est à dire* $\varphi \in \mathrm{GL}(E)$*)*. Démontrer l'équivalence :

$$\varphi^{-1} = \widetilde{\varphi} \Longleftrightarrow \varphi \text{ est un endomorphisme orthogonal}$$

(e) Soit A la matrice de u dans une base orthonormée $\{e_1, \ldots, e_n\}$ de E. Comparer la matrice A et la matrice $\widetilde{A}$ de $\widetilde{u}$ dans cette même base

(f) En déduire que si A est la matrice de $u \in \mathrm{O}(E)$, endomorphisme orthogonal, dans une base orthonormée $\{e_1, \ldots, e_n\}$ de E, alors $A^{-1} =^T A$

(g) En déduire que si A est la matrice de $u \in \mathrm{O}(E)$, endomorphisme orthogonal involutif, dans une base orthonormée $\{e_1, \ldots, e_n\}$ de E, alors $A =^T A$

Exercice 48 :

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien et $\{e_1, \ldots, e_n\}$ une famille orthonormée de E.

1. Soit $y \in E$ avec $y = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$ et $x \in E$.

   Calculer $\|x - y\|^2$ en fonction de $\|x\|$, des λ_i et de $\langle x / e_i \rangle$
2. Montrer que $\|x - y\|^2$ est minimal lorsque $\lambda_i = \langle x / e_i \rangle$
3. En déduire que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \langle x / e_i \rangle^2 \leqslant \|x\|^2$