Chapitre 16

Espaces affines, calcul barycentrique

L'objet de ce chapitre est de faire de la géométrie, plane ou dans l'espace. Il y a de nouvelles notions à assimiler : parrallélisme, barycentre. C'est l'objet de ce chapitre. la géométrie esy l'occasion de réfléchir, de faire des mathématiques

16.1 Premières définitions

16.1.1 Introduction

On appelle espace affine un ensemble $\mathcal{E}$ dont les éléments sont appelés points
Dans cet ensemble, on y met une structure qui est celle de la géométrie habituelle, à savoir :

1. **Pour tout $A \in \mathcal{E}$, pour tout $B \in \mathcal{E}$, $\overrightarrow{AB}$ désigne un vecteur**

   Ce qui veut dire que l'on associe à $\mathcal{E}$, et étroitement, un espace vectoriel que l'on notera E
   E est l'espace vectoriel associé à $\mathcal{E}$ ou direction de $\mathcal{E}$

   Pour tout vecteur $u \in E$, il y a plusieurs couples de points ou bipoints $(A, B) \in \mathcal{E}$ ou $(C, D) \in \mathcal{E}$ tels que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = u$

2. **Pour tout $u \in E$ et pour tout $M \in \mathcal{E}$, il existe un seul point $O \in \mathcal{E}$ tel que $\overrightarrow{OM} = u$**

   Ce qui veut dire que si on se donne une origine $O \in \mathcal{E}$ à notre espace affine,
   espace affine et direction se confondent. On dit aussi que donner une origine à un espace affine, **tue la structure affine.**

3. **Pour tout $A \in \mathcal{E}$, tout $B \in \mathcal{E}$ et tout $C \in \mathcal{E}$, nous avons $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$**

   C'est la relation de Chasles

16.1.2 Définition formalisée d'espace affine

On appelle espace affine un triplet $\{\mathcal{E}, E, \Theta\}$ où :

- **$\mathcal{E}$ est un ensemble dont les éléments sont appelés points**
- **E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel appelé direction de $\mathcal{E}$**
- **Θ est une application telle que :**

$$\begin{cases} \Theta : \mathcal{E} \times \mathcal{E} & \longrightarrow & E \\ \quad (A, B) : & \longmapsto & \Theta\left((A, B)\right) = \overrightarrow{AB} \end{cases}$$

vérifiant les deux conditions suivantes :

1. **La relation de Chasles :**
   Pour tout $A \in \mathcal{E}$, tout $B \in \mathcal{E}$ et tout $C \in \mathcal{E}$, nous avons $\Theta\left((A, C)\right) = \Theta\left((A, B)\right) + \Theta\left((B, C)\right)$, c'est à dire $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$

2. Pour tout $X \in E$, l'application Θ_X définie par :

$$\begin{cases} \Theta_X : \mathcal{E} & \longrightarrow & E \\ \quad B : & \longmapsto & \Theta_X(B) = \overrightarrow{XB} \end{cases}$$

est une bijection

Remarque 1 :

1. Souvent, pour simplifier, nous disons $\mathcal{E} = \{\mathcal{E}, E, \Theta\}$
2. La dimension de l'espace affine $\mathcal{E}$ est celle de sa direction E

16.1.3 Règles de calcul

Pour tout $A \in \mathcal{E}$, tout $B \in \mathcal{E}$ et tout $C \in \mathcal{E}$, nous avons :

1. $\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{0}$
2. $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$
3. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0} \Longleftrightarrow A = B$

Démonstration

1. Montrons que $\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{0}$

   Il suffit de voir, qu'avec la relation de Chasles, $\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{AA} + \overrightarrow{AA}$ et donc $2\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{AA}$ d'où $\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{0}$
2. Montrons que $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$

   D'après la relation de Chasles et le résultat précédent, nous avons $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{0}$; d'où le résultat.
3. Montrons que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0} \Longleftrightarrow A = B$

   Nous avons $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{0}$; pour tout point $A \in \mathcal{E}$, il n'existe qu'un seul point $X \in \mathcal{E}$ tel que $\overrightarrow{AX} = \overrightarrow{0}$; donc, de $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{0}$, nouds déduisons que $A = B$

16.1.4 Translation

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de direction le $\mathbb{R}$-espace vectoriel E. Soit $u \in E$ un vecteur de E. On appelle translation de vecteur u, l'application t_u ainsi définie :

$$\begin{cases} t_u : \mathcal{E} & \longrightarrow & \mathcal{E} \\ \quad A & \longmapsto & t_u(A) = A' \end{cases}$$

Où $\overrightarrow{AA'} = u$

16.1.5 Proposition

Si $\mathcal{T}_{\mathcal{E}}$ est l'ensemble des translations de $\mathcal{E}$, alors, $\mathcal{T}_{\mathcal{E}}$ muni de la composition des applications est un groupe commutatif

Démonstration

La démonstration est très simple.

1. L'ensemble $\mathcal{T}_{\mathcal{E}}$ est non vide puisque $\mathrm{Id}_{\mathcal{E}} = t_{\overrightarrow{0}}$ est un élément de $\mathcal{T}_{\mathcal{E}}$
2. Ensuite, la loi $\circ$ est interne

   Il suffit de remarquer que, si $u \in E$ et $v \in E$, alors $t_u \circ t_v = t_{u+v}$

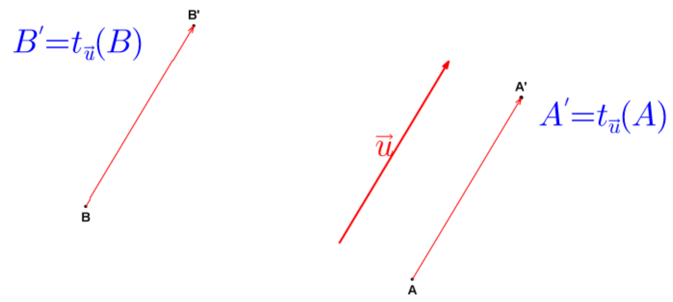

FIGURE 16.1 – Visualisation d'une translation de vexteur u : $A' = t_u(A)$ et $B' = t_u(B)$

3. A partir de cette remarque, nous voyons aisément que :
   - ▹ La composition des translations est commutative :

$$t_u \circ t_v = t_{u+v} = t_{v+u} = t_v \circ t_u$$

   - ▹ Le neutre est $\mathrm{Id}_{\mathcal{E}} = t_{\overrightarrow{0}}$
   - ▹ L'application réciproque est $(t_u)^{-1} = t_{-u}$

A partir de cette démonstration, il est aisé de voir que nous pouvons créer un isomorphisme de groupe Φ entre $(E, +)$ et $(\mathcal{T}_{\mathcal{E}}, \circ)$ en posant $\Phi(u) = t_u$

Exemple 1 :

Des exemples d'espaces affines :

1. L'espace naturel qui nous entoure *(dimension 3)*
2. Le plan *(dimension 2)* appelé plan affine
3. La droite est un espace affine de dimension 1

Remarque 2 :

Il est important de noter le rôle essentiel joué par les translations dans un espace affine. En effet, nous avons :$B = t_{\overrightarrow{AB}}(A)$, et, dans un parallélogramme, $ABCD$, $D = t_{\overrightarrow{AB}}(C)$

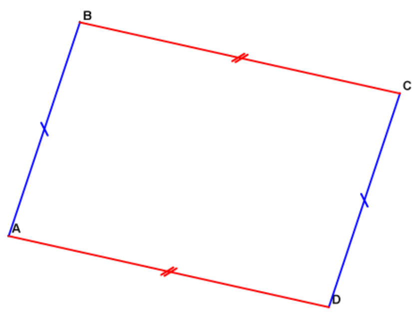

FIGURE 16.2 – Visualisation d'un parallélogramme

Exercice 1 :

Montrer que si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, alors $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$. Avons nous la réciproque ?

16.1.6 Sous-espace affine

Soit $\{\mathcal{E}, E, \Theta\}$ un espace affine.
On appelle sous-espace affine de $\mathcal{E}$ un triplet $\{\mathcal{F}, F, \Theta\}$ où :

- ▹ **$\mathcal{F}$ est un sous-ensemble de $\mathcal{E}$ ($\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$)**
- ▹ **F est un sous-espace vectoriel de E**
- ▹ **$\{\mathcal{F}, F, \Theta\}$ est un espace affine**

— **F est la direction de $\mathcal{F}$**
— **La dimension du sous-espace affine $\mathcal{F}$ est celle de sa direction F**

16.1.7 Notion de repère

$\mathcal{E}$ est un espace affine de dimension 3

1. **On appelle repère cartésien de $\mathcal{E}$ un quadruplet $\mathcal{R}(O, i, j, k)$ où $O \in \mathcal{E}$ et $\{i, j, k\}$ sont 3 vecteurs du $\mathbb{R}$-espace vectoriel E qui forment une base de E**
2. **On appelle repère affine de $\mathcal{E}$ un quadruplet $\mathcal{R}(A, B, C, D)$ où $A \in \mathcal{E}$,$B \in \mathcal{E}$, $C \in \mathcal{E}$ et $D \in \mathcal{E}$ avec $\left\{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right\}$ sont 3 vecteurs du $\mathbb{R}$-espace vectoriel E qui forment une base de E**

Remarque 3 :

1. La définition de repère affine ci-dessus est équivalente à :

   $\mathcal{R}(A, B, C, D)$ est un repère affine si et seulement si les points A, B, C, D sont non coplanaires

2. Nous avons des définitions semblables pour le plan affine et la droite affine :

   (a) Un repère cartésien d'un espace affine $\mathcal{E}$ de dimension 2 *(un plan affine)* est un triplet $\mathcal{R}(O, i, j)$ où $O \in \mathcal{E}$ et $\{i, j\}$ sont 2 vecteurs du $\mathbb{R}$-espace vectoriel E qui forment une base de E

   (b) Un repère affine d'un espace affine $\mathcal{E}$ de dimension 2 est un triplet $\mathcal{R}(A, B, C)$ où $A \in \mathcal{E}$,$B \in \mathcal{E}$ et $C \in \mathcal{E}$ avec $\left\{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right\}$ sont 2 vecteurs du $\mathbb{R}$-espace vectoriel E qui forment une base de E. De la même manière :

   $\mathcal{R}(A, B, C)$ est un repère affine si et seulement si les points A, B, C sont non alignés

   (c) Un repère cartésien d'un espace affine $\mathcal{E}$ de dimension 1 *(une droite affine)* est un couple $\mathcal{R}(O, i)$ où $O \in \mathcal{E}$ et $\{i\}$ est un vecteur de base de la droite vectorielle E

   (d) Un repère affine d'un espace affine $\mathcal{E}$ de dimension 1 est un couple $\mathcal{R}(A, B)$ où $A \in \mathcal{E}$,$B \in \mathcal{E}$ avec $\left\{\overrightarrow{AB}\right\}$ est un vecteur de base de la droite vectorielle E. De même :

   $\mathcal{R}(A, B)$ est un repère affine si et seulement si les points A et B ne sont pas confondus

3. Comment définir un plan (ABC) où A, B et C sont non alignés ? Très simplement par :

$$(ABC) = \left\{M \in \mathcal{E} \text{ tels que } \overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{AB} + \mu\overrightarrow{AC} \text{ où } \lambda \in \mathbb{R} \text{ et } \mu \in \mathbb{R}\right\}$$

   En fait, (ABC) est un repère affine

4. Autre question : comment définir une droite (AB) où A, B sont non confondus ? Par :

$$(AB) = \left\{M \in \mathcal{E} \text{ tels que } \overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{AB} \text{ où } \lambda \in \mathbb{R}\right\}$$

   Et donc, (AB) est un repère affine de la droite

16.1.8 Coordonées dans un repère cartésiens

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de dimension 3, muni d'un repère cartésien $\mathcal{R}(O,i,j,k)$.
Pour tout point $M\in\mathcal{E}$, il existe un unique triplet $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ tel que

$$\overrightarrow{OM}=xi+yj+zk$$

Ce sont les coordonnées cartésiennes du point $M(x,y,z)$ dans le repère $\mathcal{R}(O,i,j,k)$

Si $u=\overrightarrow{OM}$, alors $u=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$

Remarque 4 :

1. Vous remarquerez que les coordonnées d'un point s'écrivent en ligne, alors que celles d'un vecteur s'écrivent en colonne ; cela permet de différencier *la structure affine* de *la structure vectorielle.*
2. D'autre part, il est tout aussi clair que **les coordonnées d'un point dépendent du repère choisi**

Exercice 2 :

Définissez aussi les coordonnées cartésiennes d'un point dans un plan affine muni d'un repère cartésien $\mathcal{R}(O,i,j)$

Remarque 5 :

Faisons une remarque sur **les équations paramétriques**
Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de dimension 3, muni d'un repère cartésien $\mathcal{R}(O,i,j,k)$.

1. Un plan (P) de $\mathcal{E}$ est défini par un point $A(a,b,c)$ par où passe ce plan et 2 vecteurs directeurs $u=\begin{pmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{pmatrix}$ et $v=\begin{pmatrix}x_2\\y_2\\z_2\end{pmatrix}$.

   Tout point $M\in(P)$ est défini par la relation : $\overrightarrow{AM}=\lambda u+\mu v$ avec $\lambda\in\mathbb{R}$ et $\mu\in\mathbb{R}$.

   Si $M(x,y,z)$ les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AM}$ sont : $\overrightarrow{AM}=\begin{pmatrix}x-a\\y-b\\z-c\end{pmatrix}$, de telle sorte que nous pouvons écrire :

$$\left\{\begin{array}{rl}x-a= & \lambda x_1+\mu x_2\\ y-b= & \lambda y_1+\mu y_2\\ z-c= & \lambda z_1+\mu z_2\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rl}x= & a+\lambda x_1+\mu x_2\\ y= & b+\lambda y_1+\mu y_2\\ z= & c+\lambda z_1+\mu z_2\end{array}\right.$$

   Ce sont les équations paramétriques du plan (P)

2. Une droite (D) de $\mathcal{E}$ est défini par un point $A(a,b,c)$ par où passe cette droite et 1 vecteur directeur $u=\begin{pmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{pmatrix}$.

   Tout point $M\in(D)$ est défini par la relation : $\overrightarrow{AM}=\lambda u$ avec $\lambda\in\mathbb{R}$. Si $M(x,y,z)$ les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AM}$ sont : $\overrightarrow{AM}=\begin{pmatrix}x-a\\y-b\\z-c\end{pmatrix}$, de telle sorte que nous pouvons écrire :

$$\left\{\begin{array}{rl}x-a= & \lambda x_1\\ y-b= & \lambda y_1\\ z-c= & \lambda z_1\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rl}x= & a+\lambda x_1\\ y= & b+\lambda y_1\\ z= & c+\lambda z_1\end{array}\right.$$

   Ce sont les équations paramétriques de la droite (D)

Exercice 3 :

Il est aussi possible de définir les équations paramétriques d'une droite dans un espace affine $\mathcal{E}$ de dimension 2.
Définir les équations paramétriques d'une droite (D) d'un plan affine $\mathcal{E}$ passant par $A\,(a, b)$ et de vecteur directeur $u = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$.

Exercice 4 :

Donner une représentation paramétrique et une équation cartésienne des plans $(A, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ dans les cas suivants :

1. $A\,(0, 0, 0)$ $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$
2. $A\,(1, 2, 1)$ $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
3. $A\,(5, 2, -1)$ $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix}$