16.2 Le parallélisme dans l'espace

Si nous parlons, ici, de parallélisme dans l'espace de dimension 3, il est trivial de transposer définitions et résultats dans les espaces affines d'autres dimensions (dimension 2 ou dimension $n \geqslant 3$)

16.2.1 Définition de 2 droites parallèles

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de dimension 3
La droite D de repère (A, u) est parallèle à la droite D_1 passant par le point B si et seulement si :

$$(\forall M \in D_1)\left(\overrightarrow{BM} = \lambda u\right) \textbf{ où } \lambda \in \mathbb{R}$$

Exemple 2 :

Dans le plan affine $\mathcal{P}$, on considère le triangle $\{A, B, C\}$ et B' le milieu du segment $[AC]$ et C' le milieu du segment $[BA]$.

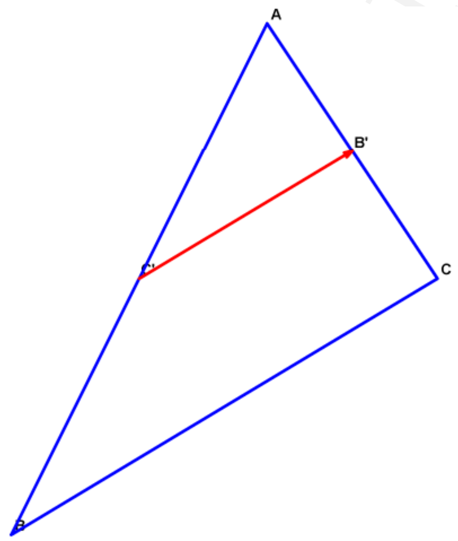

FIGURE 16.3 – Voici la figure

Nous avons $\overrightarrow{C'B'} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC}$
En effet, par la relation de Chasles :

$$\overrightarrow{C'B'} = \overrightarrow{C'A} + \overrightarrow{AB'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right) = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$$

Ainsi, les droites (BC) et $(B'C')$ sont-elles parallèles.

Remarque 6 :

Il est possible d'avoir des droites non parallèles et non sécantes :

- Soit D la droite passant par le point $A(0, 1, 0)$ et de vecteur directeur $i = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Alors, tout point $M(x, y, z)$ de D est tel que $\overrightarrow{AM} = ti$ avec $t \in \mathbb{R}$ de telle sorte que les équations paramétriques de D sont :

$$\begin{cases} x = & t \\ y = & 1 \\ z = & 0 \end{cases}$$

▷ Soit D_1 la droite passant par le point $B\,(1,1,1)$ et de vecteur directeur $j = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Alors, tout point $M\,(x,y,z)$ de D_1 est tel que $\overrightarrow{BM} = tj$ avec $t \in \mathbb{R}$ de telle sorte que les équations paramétriques de D_1 sont :

$$\left\{ \begin{array}{rl} x = & 1 \\ y = & 1+t \\ z = & 1 \end{array} \right.$$

Ces deux droites ne sont pas parallèles *(elles n'ont pas le même vecteur directeur)* et ne sont pas sécantes.

16.2.2 Définition de 2 plans parallèles

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de dimension 3
Le plan P de repère (A,u,v) est parallèle au plan P_1 passant par le point B si et seulement si :

$$(\forall M \in P_1)\left(\overrightarrow{BM} = \lambda u + \mu v\right) \textbf{ où } \lambda \in \mathbb{R} \textbf{ et } \mu \in \mathbb{R}$$

Remarque 7 :

1. **Est-il possible d'avoir 2 plans non parallèles et non sécants, comme pour les droites ?**

   On se donne les plans $P\,(A,u,v)$ et $P_1\,(B,u_1,v_1)$. On sait que le svecteurs u et v sont indépendants, de même que les vecteurs u_1 et v_1. De 2 choses l'une :
   - ⋆ Il est impossible de construire une base de E avec les familles $\{u,v\}$ et $\{u_1,v_1\}$; ce qui veut dire que les plans $P\,(A,u,v)$ et $P_1\,(B,u_1,v_1)$ sont parallèles
   - ⋆ On peut construire une base $\{u,v,u_1\}$ de E. Alors, $v_1 = au + bv + cu_1$; en choisissant (A,u,v,u_1) comme repère affine de $\mathcal{E}$, les équations paramétriques de P et P_1 deviennent :

   $$P\,(A,u,v) : \left\{ \begin{array}{rl} x = & \lambda_0 \\ y = & \mu_0 \\ z = & 0 \end{array} \right. \qquad P_1\,(B,u_1,v_1) : \left\{ \begin{array}{rl} x = & x_B + a\mu_1 \\ y = & y_B + b\mu_1 \\ z = & z_B + \lambda_1 + c\mu_1 \end{array} \right.$$

   S'il existe une intersection entre ces deux plans, nous avons alors le système d'équations :

   $$\left\{ \begin{array}{rl} \lambda_0 = & x_B + a\mu_1 \\ \mu_0 = & y_B + b\mu_1 \\ 0 = & z_B + \lambda_1 + c\mu_1 \end{array} \right.$$

   Ce qui montre qu'il existe une intersection non vide dont les coordonnées vérifient :

   $$\left\{ \begin{array}{rl} x = & x_B + a\mu_1 \\ y = & y_B + b\mu_1 \\ z = & 0 \end{array} \right.$$

   C'est donc une droite passant par le point $X\,(x_b, y_b, 0)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix}$

2. **Existe-t-il droites et plans parallèles ?**

   NON !....Puisque ne réponds pas à la définition de parallélisme. Par contre, Si P est le plan (A,u,v) et D la droite (B,w) où $B \notin P$ et $w = \lambda u + \mu v$. D et P n'ont aucun point commun. On dit qu'ils sont faiblement parallèles

16.2.3 Quelques exercices

Exercice 5 :

Le plan affine $\mathcal{P}$ est muni d'un repère cartésien $\mathcal{R}(O, i, j)$.
A tout réel $m \in \mathbb{R}$, nous associons la droite D_m d'équation :

$$(2m-1)\,x + (3-m)\,y - 7m + 6 = 0$$

1. Déterminer $m \in \mathbb{R}$ tel que :
   (a) D_m soit parallèle à l'axe des abscisses
   (b) D_m soit parallèle à l'axe des ordonnées
   (c) D_m passe par le point $A\,(1,1)$
   (d) D_m soit parallèle à la droite d'équation $2x + 3y - 1 = 0$
2. Démontrez que toutes les droites D_m passent par un point fixe F dont on précisera les coordonnées.

Exercice 6 :

Le plan affine $\mathcal{P}$ est muni d'un repère cartésien $\mathcal{R}(O, i, j)$.
A tout réel $m \in \mathbb{R}$, nous associons les droites D_m et Δ_m d'équation :

$$D_m : \quad (m+2)\,x + (3-2m)\,y + 3m - 8 = 0$$

$$\Delta_m : \quad (9m-3)\,x + (10-8m)\,y - 8m - 2 = 0$$

1. Démontrez que toutes les droites D_m passent par un point fixe A dont on précisera les coordonnées.
2. Démontrez que toutes les droites Δ_m passent par un point fixe B dont on précisera les coordonnées.
3. Est-il possible de trouver $m \in \mathbb{R}$ tel que $D_m = \Delta_m$?