16.3 Le calcul barycentrique

En mécanique, l'étude du mouvement des points d'un système matériel fait intervenir différents éléments parmi lesquels les masses, positives, des points du système.
En électrostatique, le champ électrique produit par un système de particules électrisées est déterminé, à un instant donné, par la position des particules et par les charges, positives ou négatives, des différentes particules.
En statistique, lorsqu'on s'intéresse à un caractère quantitatif X des individus d'une population E (âge, poids, taille, nombre d'enfants, salaire mensuel, ...), on associe à chaque valeur x_i de X le nombre η_i des individus de E pour lesquels le caractère X prend la valeur x_i
Comme le montrent ces exemples, il est fréquent que l'étude d'un phénomène fasse intervenir un système de points affectés de coefficients. S'il est possible de remplacer le système par un seul point muni d'un seul coefficient, l'étude s'en trouvera évidemment facilitée.

16.3.1 Définition

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine

1. **On appelle point massique ou point pondéré, tout couple (A, α) où $A \in \mathcal{E}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$**
2. **Etant donnée une famille finie de points pondérés $\{(A_i, \alpha_i)$ avec $1 \leqslant i \leqslant n\}$**
   On appelle fonction vectorielle de Leibniz, l'application f définie par :

$$\begin{cases} f : \mathcal{E} & \longrightarrow & E \\ \quad M & \longmapsto & \overrightarrow{f(M)} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{MA_i} \end{cases}$$

16.3.2 Théorème

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine et $\{(A_i, \alpha_i)$ avec $1 \leqslant i \leqslant n\}$ un système de points pondérés. Soit f la fonction de Leibniz associée au système $\{(A_i, \alpha_i)$ avec $1 \leqslant i \leqslant n\}$. Alors :

1. **Pour tout $M \in \mathcal{E}$ et tout $M' \in \mathcal{E}$, $\overrightarrow{f(M)} = \overrightarrow{f(M')} + \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\right) \overrightarrow{MM'}$**
2. (a) **Si $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 0$, la fonction f est constante**
   (b) **Si $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \neq 0$, la fonction f est bijective**

Démonstration

1. Soient $M \in \mathcal{E}$ et $M' \in \mathcal{E}$. Alors :

$$\overrightarrow{f(M)} - \overrightarrow{f(M')} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{MA_i} - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{M'A_i} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left(\overrightarrow{MA_i} - \overrightarrow{M'A_i}\right) = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\right) \overrightarrow{MM'}$$

2. (a) Il est alors bien clair que si $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 0$, alors, pour tout $M \in \mathcal{E}$ et tout $M' \in \mathcal{E}$, $\overrightarrow{f(M)} = \overrightarrow{f(M')}$, et donc que f est constante.
   (b) Supposons $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \neq 0$

- ▷ **Montrons que f est injective**
  Soient Soient $M \in \mathcal{E}$ et $M' \in \mathcal{E}$ tels que $\overrightarrow{f(M)} = \overrightarrow{f(M')}$. Alors, du résultat $\overrightarrow{f(M)} = \overrightarrow{f(M')} + \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\right) \overrightarrow{MM'}$, nous tirons $\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\right) \overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{0}$.
  Comme $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \neq 0$, nous avons $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{0}$, c'est à dire $M = M'$
- — **Montrons que f est surjective**
  Soit $u \in E$; il faut trouver $M \in \mathcal{E}$ tel que $\overrightarrow{f(M)} = u$. Soit $O \in \mathcal{E}$ *(O peut être l'origine d'un repère cartésien, par exemple).*
  Alors, pour tout point $M \in \mathcal{E}$, nous avons :
  $$\overrightarrow{f(M)} = \overrightarrow{f(O)} + \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\right) \overrightarrow{MO} \Longleftrightarrow u = \overrightarrow{f(O)} + \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\right) \overrightarrow{MO}$$
  D'où nous tirons l'existence d'un point $M \in \mathcal{E}$ tel que $\overrightarrow{f(M)} = u$; ce point M est défini par :
  $$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i} \left(\overrightarrow{f(O)} - u\right)$$
  Où O est un point quelconque de $\mathcal{E}$ [1]

La fonction vectorielle de Leibniz est donc bien une bijection

16.3.3 Corollaire

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine et $\{(A_i, \alpha_i)$ avec $1 \leqslant i \leqslant n\}$ un système de points pondérés tel que $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \neq 0$.

Il existe un et un seul point $G \in \mathcal{E}$ tel que $\overrightarrow{f(G)} = \overrightarrow{0}$
Ce point G est appelé barycentre du système pondéré $\{(A_i, \alpha_i)$ avec $1 \leqslant i \leqslant n\}$

Remarque 8 :

1. Ainsi, pour tout point $M \in \mathcal{E}$, nous avons :
$$\overrightarrow{f(M)} = \overrightarrow{f(G)} + \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\right) \overrightarrow{MG} \Longleftrightarrow \overrightarrow{f(M)} = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\right) \overrightarrow{MG}$$
C'est à dire :
$$\overrightarrow{MG} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i} \overrightarrow{f(M)} \Longleftrightarrow \overrightarrow{MG} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i} \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{MA_i}\right)$$
2. Si $\mathcal{E}$ est rapporté à un repère cartésien $\mathcal{R}(O, i, j, k)$, il est possible de déduire les coordonnées de G en remplaçant M par l'origine O :
$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i} \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{OA_i}\right)$$

1. Autant choisir l'origine !!

Exercice 7 :

Cet exercice est un exercice d'application directe
Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de dimension quelconque
Un triangle $\{ABC\}$ de l'espace $\mathcal{E}$ étant donné, on considère l'application f de $\mathcal{E}$ dans E qui, à à tout point $M \in \mathcal{E}$, associe le vecteur : $\overrightarrow{f(M)} = -5\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}$.

1. Pour tout bipoint (M, M') démontrer que $\overrightarrow{f(M)} - \overrightarrow{f(M')} = -2\overrightarrow{MM'}$.
   Existe-t-il un point $G \in \mathcal{E}$ tel que $\overrightarrow{f(G)} = \overrightarrow{0}$?
   Exprimer alors le vecteur $\overrightarrow{f(M)}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{MG}$
2. Montrer que G appartient au plan (ABC) et déterminer sa position avec précision en indiquant ses coordonnées dans un repère bien choisi du plan (ABC).
3. **Application :**
   (a) A tout point $M \in \mathcal{E}$ distinct de G, on associe la droite D_M passant par M et de vecteur directeur $\overrightarrow{f(M)}$. Démontrer que les droites D_M passent par un point fixe.
   (b) A tout point $M \in \mathcal{E}$, on associe le point M' tel que $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{f(M)}$ Reconnaître l'application g qui à M fait correspondre M'

Exercice 8 :

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de dimension quelconque. Nous considérons le système de points pondérés $\{(A_1, \alpha), (A_2, \alpha), (A_3, \alpha) \cdots (A_n, \alpha)\}$ avec $\alpha \neq 0$.
Le barycentre du système est appelé **isobarycentre**.
Montrer que si G est l'isobarycentre du système, alors, pour tout point $O \in \mathcal{E}$, nous avons

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{OA_i}$$

Exercice 9 :

Soient A, B et C 3 points du plan affine, d'affixe respective $z_A = 1 + i$, $z_B = -1 + i$ et $z_C = i$
Quelle est l'affixe z_G du barycentre du système pondéré $\{(A, 1), (B, -4), (C, +5)\}$

16.3.4 Propriétés du barycentre

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de dimension quelconque.

1. **Le barycentre d'un système pondéré $\{(A_i, \alpha_i)$ avec $1 \leqslant i \leqslant n\}$ ne change pas si on modifie l'ordre des points**
2. **Soit $G \in \mathcal{E}$ le barycentre du système pondéré $\{(A_i, \alpha_i)$ avec $1 \leqslant i \leqslant n\}$. Alors, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^*$, G est aussi le barycentre du ststème pondéré $\{(A_i, \lambda\alpha_i)$ avec $1 \leqslant i \leqslant n\}$**
3. **Propriété d'associativité du barycentre**
   Le barycentre G d'un système pondéré $\{(A_i, \alpha_i)$ avec $1 \leqslant i \leqslant n\}$ ne change pas si nous remplaçons plusieurs points dont la somme des coefficients est non nulle par leur barycentre, affecté de la somme des coefficients

Démonstration

La démonstration des deux premiers points est évidente. Nous ne démontrons que l'associativité du barycentre.
Soit donc $\mathcal{E}$ un espace affine et $\{(A_i, \alpha_i)$ avec $1 \leqslant i \leqslant n\}$ un système pondéré. Nous extrayons de ce système pondérés k points, $k \leqslant n$, que nous réordonnons en $\{(A_i, \alpha_i)$ avec $1 \leqslant i \leqslant k\}$, tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{k}\alpha_i \neq 0$

Ce nouveau système pondéré admet un barycentre G_1 tel que $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \overrightarrow{G_1A_i} = \overrightarrow{0}$

Soit G le barycentre du système total $\{(A_i, \alpha_i) \text{ avec } 1 \leqslant i \leqslant n\}$. Alors :

$$\overrightarrow{0} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \overrightarrow{GA_i} + \sum_{i=k+1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{GA_i}$$

G_1 étant le barycentre de $\{(A_i, \alpha_i) \text{ avec } 1 \leqslant i \leqslant k\}$, d'après 16.3.2, nous avons :

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = \left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i\right) \overrightarrow{GG_1} \iff \overrightarrow{GG_1} = \frac{1}{\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{k} \alpha_i\right)} \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \overrightarrow{GA_i} \iff \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = \left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i\right) \overrightarrow{GG_1}$$

En remplaçant $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \overrightarrow{GA_i}$ par sa nouvelle valeur, nous obtenons :

$$\overrightarrow{0} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = \left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i\right) \overrightarrow{GG_1} + \sum_{i=k+1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{GA_i}$$

Et G apparaît bien comme le barycentre du système pondéré $\left\{\left(G_1, \displaystyle\sum_{i=1}^{k} \alpha_i\right), (A_i, \alpha_i) \text{ avec } k+1 \leqslant i \leqslant n\right\}$

Ce que nous voulions

Remarque 9 :

Cette propriété d'associativité des barycentres permet de prouver la concourrance de certaines droites

Exemple 3 :

Nous nous plaçons toujours dans un espace affine $\mathcal{E}$ de dimension quelconque

1. Quel est l'isobarycentre de $\{A, B\}$?

   L'isobarycentre de $\{A, B\}$ est un point tel que $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{0}$ ou encore un point I tel que, pour tout $M \in \mathcal{E}$ $\overrightarrow{MI} = \dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\right)$

   En choisissant $M = A$, nous obtenons $\overrightarrow{AI} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, c'est à dire que I est le milieu du segment $[A, B]$

2. Quel est l'isobarycentre du triangle $\{A, B, C\}$?

   L'isobarycentre du triangle $\{A, B, C\}$ est un point G tel que $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 0$
   En utilisant la propriété d'associativité du barycentre, G est aussi le barycentre de $\{(I, 2), (C, 1)\}$ où I est le milieu du segment $[A, B]$, c'est à dire qu'il est tel que $2\overrightarrow{GI} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$. G est donc sur la droite (CI)
   De même, G est sur la droite (BK) et (AJ). G est donc le point de rencontre des médianes du triangle $\{A, B, C\}$

3. Quel est l'isobarycentre du tétraèdre $\{A, B, C, D\}$? *(4 points non coplanaires)*

   Si nous considérons le triangle $\{A, B, C\}$ et son isobarycentre G, alors, l'isobarycentre T du tétraèdre $\{A, B, C, D\}$ est tel que $3TG + TA = 0$, c'est à dire que $\overrightarrow{GT} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{GA}$

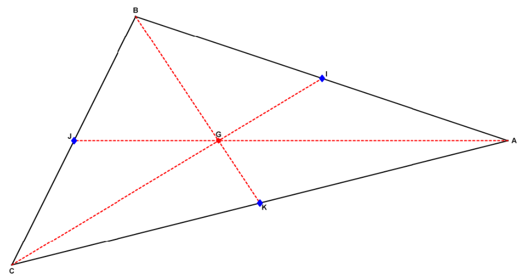

FIGURE 16.4 – G isobarycentre du triangle $\{A, B, C\}$, point de rencontre des médianes du triangle $\{A, B, C\}$

Exercice 10 :

Dans le plan affine $\mathcal{P}$, on se donne deux points distincts A et B

1. Quelles sont les conditions sur $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R}$ pour qu'il existe $M' \in \mathcal{P}$ tel que :
$$\alpha\overrightarrow{M'A} + \beta\overrightarrow{M'B} + 2\overrightarrow{MM'} = 0$$
2. Ces conditions étant réalisées, soit f l'application du plan $\mathcal{P}$, qui à $M \in \mathcal{P}$ associe $M' \in \mathcal{P}$.
Déterminer suivant les valeurs du couple (α, β) l'ensemble des points invariants par f
3. On suppose $\alpha + \beta = 0$; Quelle est la nature de f ?
4. On suppose $\alpha + \beta \neq 0$; Quelle est la nature de f ?

Exercice 11 :

Dans le plan affine $\mathcal{P}$, on considère le triangle $\{A, B, C\}$

1. Définir, par ses coordonnées dans le repère $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$ le barycentre G du système pondéré $\{(A, -2), (B, 4), (C, 1)\}$
2. Soit $M \in \mathcal{P}$ de coordonnées (x, y) dans le repère $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$
Montrer que M est le barycentre du système pondéré $\{(A, 1 - x - y), (B, x), (C, y)\}$

16.3.5 Barycentre de 2 points distincts

Soient $\mathcal{E}$ un espace affine de dimension quelconque et $A \in \mathcal{E}$ et $B \in \mathcal{E}$ tels que $A \neq B$.
L'ensemble des barycentres de A et B est la droite (AB)

Démonstration

1. Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta_i n\mathbb{R}$ tels que $\alpha + \beta \neq 0$
On appelle G le barycentre de la famille pondérée $\{(A, \alpha) ; (B, \beta)\}$. Alors :
$$\overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha + \beta}\overrightarrow{AB}$$
Ce qui montre que $G \in (AB)$
2. réciproquement, soit $M \in (AB)$
Alors, $\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{AB} \iff (1 - \lambda)\overrightarrow{AM} + \lambda\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{0}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$
M apparaît donc comme le barycentre de la famille pondérée $\{(A, (1 - \lambda)) ; (B, \lambda)\}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$

Remarque 10 :

1. (A, B) engendre une droite (D). On dit que (A, B) est un repère affine (D)
2. (a) Si M est le barycentre de la famille pondérée $\{(A, \alpha) ; (B, \beta)\}$.
   Le couple (α, β) est le système de coordonnées barycentriques de M dans le repère (A, B). Ces coordonnées ne sont pas uniques car, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^*$, les couples $(\lambda\alpha, \lambda\beta)$ sont d'autres systèmes de coordonnées barycentriques de M dans le repère (A, B)
   (b) L'unicité des coordonnées barycentriques n'existe que si on impose à α et β certaines conditions. Par exexemples :

   $\star$ $\alpha + \beta = 1$ $\star$ $\alpha + \beta = \lambda$ où $\lambda \in \mathbb{R}^*$

   En fait, il n'y a pas d'autres conditions possibles que celles ci-dessus.
3. L'isobarycentre de 2 points, c'est le milieu du segment défini par ces 2 points. Il a pour coordonnées barycentriques (α, α) où $\alpha \in \mathbb{R}^*$. Si nous imposons à la somme des coordonnées barycentriques d'être égale à 1, les coordonnées barycentriques du milieu seront $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$
4. Le segment $[A; B]$ est l'ensemble des points $M \in \mathcal{E}$ tels que $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB}$ avec $t \in [0; 1]$. M apparaît donc comme le barycentre de la famille pondérée $\{(A, (1-t)) ; (B, t)\}$ avec $t \in [0; 1]$

Exercice 12 :

Soient $\mathcal{E}$ un espace affine de dimension quelconque et $A \in \mathcal{E}$ et $B \in \mathcal{E}$ tels que $A \neq B$. Soit M un point de la droite (AB) de coordonnées barycentriques dans le repère affine (A, B) (α, β).
Montrer que $M \in [A; B]$ si et seulement si $\alpha \times \beta \geqslant 0$

16.3.6 Barycentre de 3 points distincts et non alignés

Soient $\mathcal{E}$ un espace affine de dimension quelconque et $A \in \mathcal{E}$, $B \in \mathcal{E}$ et $C \in \mathcal{E}$ sont 3 points de $\mathcal{E}$, distincts et non alignés.
L'ensemble des barycentres de A, B et C est le plan (ABC)

Démonstration

En prenant $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$ comme repère affine du plan (ABC), la démonstration est semblable à 16.3.5

Remarque 11 :

1. Un plan $\mathcal{P}$ est donc « engendré » par 3 points A, B et C non alignés ; (A, B, C) est donc un repère affine du plan
2. Pour tout point $M \in \mathcal{P}$, les coordonnées barycentriques de M dans le répère (A, B, C) étant (α, β, γ) avec $\alpha+\beta+\gamma \neq 0$ expriment que M est le barycentre de la famille $\{(A, \alpha) ; (B, \beta) ; (C, \gamma)\}$
3. Les coordonnées barycentriques d'un point ne sont pas uniques.
   Les coordonnées barycentriques du centre de gravité G du triangle $\{A, B, C\}$ sont $(1, 1, 1)$ ou encore $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ ou, plus généralement, (α, α, α) avec $\alpha \neq 0$

16.4 Exercices sur le calcul barycentrique

Exercice 13 :

Soit $\mathcal{P}$ le plan affine, et A, B et C 3 points de $\mathcal{P}$. On désigne par G l'isobarycentre du triangle $\{A, B, C\}$, par A' le milieu du segment $[B, C]$, par B' le milieu du segment $[A, C]$ et par C' le milieu du segment $[A, B]$.

On désigne aussi par A" le symétrique de A par rapport à A', par B" le symétrique de B par rapport à B' et par C" le symétrique de C par rapport à C'
Déterminer, dans le repère affine (A, B, C) un système de coordonnées barycentriques des points A, B, C, A', B', C', A", B" et C"

Exercice 14 :

Le plan $\mathcal{P}$ est muni d'un repère affine (A, B, C)

1. R et S étant les deux points de coordonnées barycentriques respectives $(-1, 2, 1)$ et $(2, 1, -1)$. Démontrer qu'un point M de coordonnées barycentriques (a, b, c) appartient à la droite (RS) si et seulement si $-3a + b - 5c = 0$
2. Soit $\mathcal{D}$ l'ensemble des points M dont les coordonnées barycentriques (a, b, c) vérifient la relation $2a + b - c = 0$. Démontrer que $\mathcal{D}$ est une droite.
   Déterminer un système de coordonnées barycentriques du point d'intersection des droites (RS) et $\mathcal{D}$

Exercice 15 :

Dans le plan $\mathcal{P}$, on considère 3 points A, B et C non alignés. Quel est l'ensemble des points $P \in \mathcal{P}$ définis par :

$$\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$$

lorsque M décrit une droite $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}$

Exercice 16 :

Le plan $\mathcal{P}$ est muni d'un repère affine (A, B, C). On appelle A' le milieu du segment $[BC]$, B' le milieu du segment $[DC]$ et C' le milieu du segment $[BA]$.
α est un réel différent de 1 et nous désignons par I le barycentre du système pondéré $\{(B, 1) ; (C, -\alpha)\}$
Déterminer les coordonnées barycentriques :

1. De I dans le repère (A', B', C')
2. Du milieu M de $[AI]$ dans le repère (A', B', C')

Exercice 17 :

Soit $\{A, B, C\}$ un triangle. Trouver le séquations barycentriques, dans le repère affine (A, B, C)

1. Des points situés sur les côtés du triangle
2. Des points situés sur la médiane issue de A
3. Des points situés sur la parallèle à (AC) passant par l'isobarycentre du triangle $\{A, B, C\}$

Exercice 18 :

Exercice peu facile !
Soient A, A', B et B' quatre points du plan $\mathcal{P}$ tels que les droites (AA') et (BB') se coupent en I et que les droites (AB) et $(A'B')$ se coupent en L *(pour visualiser, conférer à la figure 16.5)* Les coordonnées barycentriques de I dans le repère (A, A') sont (α, α') et (β, β') dans le repère (B, B').
Quelles sont les coordonnées barycentriques de L dans les repères (A, B) et (A', B')