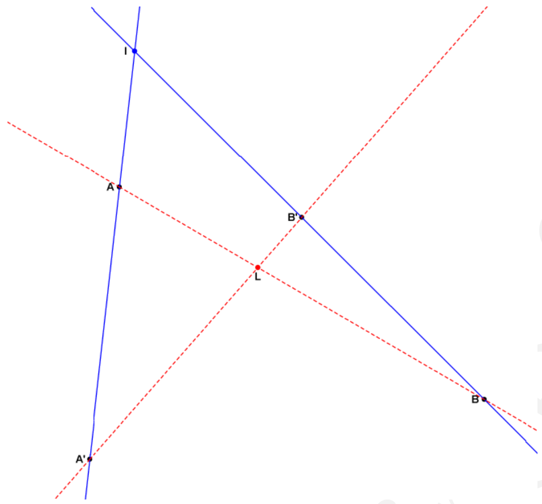

FIGURE 16.5 – Visualisation de l'exercice

16.5 Espaces affines euclidiens

16.5.1 Définition

On dit qu'un espace affine $\mathcal{E} = \{\mathcal{E}, E, \Theta\}$ est <u>euclidien</u> si sa direction E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien

Remarque 12 :

1. Il y a donc possibilité d'utiliser le produit scalaire dans $\mathcal{E}$ euclidien en écrivant $\left\langle \overrightarrow{AB} / \overrightarrow{AC} \right\rangle$.
2. On peut aussi utiliser les normes de vecteur $\left\| \overrightarrow{AB} \right\| = \sqrt{\left\langle \overrightarrow{AB} / \overrightarrow{AB} \right\rangle}$
3. Si $\mathcal{E}$ est un espace affine euclidien de dimension 3, on peut aussi utiliser des <u>repères orthonormés</u> $\mathcal{R}(O, i, j, k)$ où $\{i, j, k\}$ est une base orthonormée du $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien E. La généralisation dans un espace affine $\mathcal{E}$ de dimension n est évidente.

Exercice 19 :

Nous nous situons dans le plan affine euclidien $\mathcal{P}$ dans lequel nous avons mis un repère orthonormé $\mathcal{R}(O, i, j)$

1. Soit $A \in \mathcal{P}$ un point de coordonnées $A(1, 1)$ et $u \in P$ de coordonnées $u \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

   Etudier l'ensemble $X = \left\{ M \in \mathcal{P} \text{ tels que } \left\langle \overrightarrow{AM} / u \right\rangle = 0 \right\}$
2. Qu'en est-il de l'ensemble $X_k = \left\{ M \in \mathcal{P} \text{ tels que } \left\langle \overrightarrow{AM} / u \right\rangle = k \right\}$ où $k \in \mathbb{R}$

Remarque 13 :

Très généralement, toute droite d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$ admet comme vecteur normal, le vecteur $u = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

Une droite peut être définie par un vecteur normal et un point par où passe cette droite

Exercice 20 :

Dans l'espace affine euclidien $\mathcal{E}$ de dimension 3 dans lequel nous avons mis un repère orthonormé $\mathcal{R}(O, i, j, k)$

Soit $A \in \mathcal{E}$ un point de coordonnées $A\,(1,1,1)$ et $u \in E$ de coordonnées $u\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

Etudier l'ensemble $Y_k = \left\{M \in \mathcal{E} \text{ tels que } \left\langle \overrightarrow{AM}/u \right\rangle = k\right\}$ où $k \in \mathbb{R}$

Remarque 14 :

Très généralement, tout plan de $\mathcal{E}$ d'équation cartésienne $ax + by + cz + d = 0$ admet comme vecteur normal, le vecteur $\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

Une droite peut être définie par un vecteur normal et un point par où passe cette droite

16.5.2 Distance

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien. On peut définir, sur $\mathcal{E}$, une distance par :

$$(\forall M \in \mathcal{E})\,(\forall N \in \mathcal{E})\,\left(d\,(MN) = MN = \left\|\overrightarrow{MN}\right\|\right)$$

Cette distance vérifie les 3 axiômes :

1. $(\forall M \in \mathcal{E})\,(\forall N \in \mathcal{E})$, $(d\,(MN) = d\,(NM))$
2. $(\forall M \in \mathcal{E})\,(\forall N \in \mathcal{E})$, $(d\,(MN) = 0 \Longleftrightarrow M = N)$
3. **Inégalité triangulaire :** $(\forall M \in \mathcal{E})\,(\forall N \in \mathcal{E})\,(\forall X \in \mathcal{E})\,(d\,(MN) \leqslant d\,(MX) + d\,(XN))$

Remarque 15 :

Comment ces distances peuvent-elles s'exprimer analytiquement ?

1. Dans le plan euclidien, rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}\,(O,i,j)$, soient $M\,(x,y)$ et $N\,(x_1,y_1)$. Alors, $\overrightarrow{MN} = \begin{pmatrix} x_1 - x \\ y_1 - y \end{pmatrix}$ et :

$$MN = \left\|\overrightarrow{MN}\right\| = \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2}$$

2. Dans l'espace euclidien $\mathcal{E}$ de dimension 3, rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}\,(O,i,j,k)$, soient $M\,(x,y,z)$ et $N\,(x_1,y_1,z_1)$. Alors, $\overrightarrow{MN} = \begin{pmatrix} x_1 - x \\ y_1 - y \\ z_1 - z \end{pmatrix}$ et :

$$MN = \left\|\overrightarrow{MN}\right\| = \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2}$$

Exercice 21 :

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien et ABC un triangle *(c'est à dire, trois points non alignés de $\mathcal{E}$)*. Montrez que :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\left\langle \overrightarrow{AB}/\overrightarrow{AC} \right\rangle$$

Quel résultat retrouve-t-on lorsque le triangle est rectangle en A ?

Exercice 22 :

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien et $ABCD$ un parallélogramme de $\mathcal{E}$. Montrez la formule :

$$AC^2 - BD^2 = 4\left\langle \overrightarrow{AB}/\overrightarrow{BC} \right\rangle$$

Exercice 23 :

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien de dimension 3 muni d'un repère othonormé $\mathcal{R}(O, i, j, k)$ La droite D est définie par les 2 plans P et P_1 :

$$\begin{cases} P : & 2x - 3y - 2z + 4 = 0 \\ P_1 : & x + 2y - 2z - 5 = 0 \end{cases}$$

Montrer que les plans P et P_1 sont perpendiculaires

Exercice 24 :

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien de dimension 3 muni d'un repère othonormé $\mathcal{R}(O, i, j, k)$
On considère les deux droites D et D_1 :

$$D : \begin{cases} x - y = 1 \\ 2y + z = 3 \end{cases} \qquad D_1 : \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 3x - y = 2 \end{cases}$$

1. Donner un vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ de D et un vecteur directeur $\overrightarrow{v}$ de D_1
2. En déduire un vecteur $\overrightarrow{w}$ de leur perpendiculaire commune Δ

Exercice 25 :

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien de dimension 3. Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur de E de norme 1 et $A \in \mathcal{E}$. On définit un plan H par :

$$H = \left\{ M \in \mathcal{E} \text{ tels que } \left\langle \overrightarrow{AM} / \overrightarrow{u} \right\rangle = 0 \right\}$$

Nous définissons un repère orthonormé $\mathcal{R}(A, i, j, \overrightarrow{u})$

1. Montrer que $M \in H$ si et seulement si M a pour coordonnées $M(x, y, 0)$ avec $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$
2. Calculer, pour tout $N \in \mathcal{E}$, le produit scalaire $\left\langle \overrightarrow{AN} / \overrightarrow{u} \right\rangle$
3. En déduire que l'application f définie par :

$$\begin{cases} f : \mathcal{E} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \quad N & \longmapsto & f(N) = \left\langle \overrightarrow{AN} / \overrightarrow{u} \right\rangle \end{cases}$$

   permet de définir 2 demi-espaces dont H est la frontière.

Exercice 26 :

1. Soit $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien de dimension quelconque.
   (a) Etant donnés 3 points A, B et M de $\mathcal{E}$, montrer que l'une quelconque des égalités suivantes entraîne l'alignement des 3 points A, B et M de $\mathcal{E}$

   $\star$ $AB = AM + MB$ $\qquad$ $\star$ $AB = AM - MB$ $\qquad$ $\star$ $AB = MB - AM$

   (b) Montrer l'inégalité suivante, vraie pour 3 points quelconques A, M et B

   $$|MA - MB| \leqslant AB$$

2. Nous nous situons maintenant, dans le plan affine euclidien $\mathcal{P}$
   A et B sont 2 points distincts du plan $\mathcal{P}$ et $k \in \mathbb{R}^{*+}$. On appelle $\mathcal{C}_k$, l'ensemble des points $M \in \mathcal{P}$ tels que $\dfrac{MA}{MB} = k$
   Etudier $\mathcal{C}_k$ en fonction des valeurs de k