16.6 Fonction scalaire de Leibniz

Exercice d'introduction

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien. Une application $\varphi : \mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{R}$ étant donnée, pour tout réel $k \in \mathbb{R}$, on appelle surface ou ligne de niveau k de φ l'ensemble des antécédents de k par φ.
Autrement dit, la surface de niveau k de φ est l'ensemble S_k des point $M \in \mathcal{E}$ tels que $\varphi(M) = k$. Autrement dit :

$$S_k = \{M \in \mathcal{E} \text{ tels que } \varphi(M) = k\}$$

Pour certain'es valeurs de k, S_k peut être vide.
Dans le plan euclidien $\mathcal{P}$ rapporté à un repère cartésien $\mathcal{R}(O, i, j)$, on se donne les points $A(0,1)$, $B(1,0)$ et $C(1,1)$

Partie A

On définit f par :

$$\begin{cases} f : \mathcal{P} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \quad M & \longmapsto & f(M) = MA^2 + 3MB^2 - MC^2 \end{cases}$$

1. Soit $M' \in \mathcal{P}$; montrer que, pour tout $M \in \mathcal{P}$, nous avons :

$$f(M) = f(M') + 2\left\langle \overrightarrow{MM'} / \overrightarrow{M'A} + 3\overrightarrow{M'B} - \overrightarrow{M'C} \right\rangle + 3MM'^2$$

2. (a) Le barycentre G du sysème pondéré $\{(A,1);(B,3);(C,-1)\}$ existe-t-il ? En donner ses coordonnées.
   (b) Calculer $f(G)$
   (c) Montrer que, pour tout $M \in \mathcal{P}$ nous avons $f(M) = \dfrac{2}{3} + 3MG^2$
3. Construire l'ensemble des points $M \in \mathcal{P}$ tels que $f(M) = \dfrac{83}{3}$ et $f(M) = \dfrac{4}{3}$
4. Donner l'ensemble des points $M \in \mathcal{P}$ tels que $\dfrac{83}{3} \leqslant f(M) \leqslant \dfrac{146}{3}$
5. Pour quelles valeurs de $k \in \mathbb{R}$, avons-nous $f^{-1}(\{k\}) = \emptyset$

Partie B

1. Le barycentre du système pondéré $\{(A,-1);(B,3);(C,-2)\}$ existe-t-il ? Construire, pour tout $M \in \mathcal{P}$ le vecteur $\overrightarrow{a} = -\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}$ et donner $\|\overrightarrow{a}\|$
2. On définit f par :

$$\begin{cases} f : \mathcal{P} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \quad M & \longmapsto & f(M) = -MA^2 + 3MB^2 - 2MC^2 \end{cases}$$

   Vérifier que, pour tout $M \in \mathcal{P}$ et tout $M' \in \mathcal{P}$, $f(M) = f(M') + 2\left\langle \overrightarrow{MM'} / \overrightarrow{a} \right\rangle$
3. Nous souhaitons rechercher les points $M \in \mathcal{P}$ tels que $f(M) = +2$. Soit D la droite passant par l'origine O et de vecteur directeur $\overrightarrow{a}$. Nous voulons rechercher $X_0 \in D$ tel que $f(X_0) = +2$
   Ecrire $\left\langle \overrightarrow{X_0O} / \overrightarrow{a} \right\rangle$ de 2 manières différentes et en déduire que X_0 existe et est unique.
4. En déduire $f^{-1}(\{+2\})$
5. Rechercher l'ensemble des points $M \in \mathcal{P}$ tels que $2 \leqslant f(M) \leqslant +4$

Dans ce qui suit, nous allons généraliser l'exercice d'introduction à un espace affine quelconque, avec un nombre de points pondérés quelconque. L'objectif de l'exercice d'introduction est de manipuler des choses simples pour pouvoir, ensuite gnéraliser avec plus d'abstraction.

16.6.1 Définition

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien
Etant donnée une famille finie de points pondérés $\{(A_i, \alpha_i)$ avec $1 \leqslant i \leqslant n\}$
On appelle fonction scalaire de Leibniz, l'application f définie par :

$$\left\{\begin{array}{ccc} f : \mathcal{E} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ M & \longmapsto & f(M) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i M A_i^2 \end{array}\right.$$

16.6.2 Proposition

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien. On considère une famille finie de points pondérés $\{(A_i, \alpha_i)$ avec $1 \leqslant i \leqslant n\}$ et f est la fonction scalaire de Leibniz associée.
Alors, pour tout $M \in \mathcal{E}$ et tout $M' \in \mathcal{E}$:

$$f(M) = f(M') + 2\left\langle \overrightarrow{MM'} / \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{M'A_i} \right\rangle + \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\right) MM'^2$$

Démonstration

Soient $M \in \mathcal{E}$ et $M' \in \mathcal{E}$. Il suffit d'utiliser la bilinéarité du produit scalaire.

$$\begin{aligned} MA_i^2 &= \left\|\overrightarrow{MA_i}\right\|^2 \\ &= \left\langle \overrightarrow{MA_i} / \overrightarrow{MA_i} \right\rangle \\ &= \left\langle \overrightarrow{MM'} + \overrightarrow{M'A_i} / \overrightarrow{MM'} + \overrightarrow{M'A_i} \right\rangle \\ &= \left\langle \overrightarrow{MM'} / \overrightarrow{MM'} \right\rangle + \left\langle \overrightarrow{M'A_i} / \overrightarrow{M'A_i} \right\rangle + 2\left\langle \overrightarrow{MM'} / \overrightarrow{M'A_i} \right\rangle \\ &= \left\|\overrightarrow{MM'}\right\|^2 + \left\|\overrightarrow{M'A_i}\right\|^2 + 2\left\langle \overrightarrow{MM'} / \overrightarrow{M'A_i} \right\rangle \\ &= MM'^2 + M'A_i^2 + 2\left\langle \overrightarrow{MM'} / \overrightarrow{M'A_i} \right\rangle \end{aligned}$$

Et, en remplaçant, nous avons donc :

$$\begin{aligned} f(M) &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i MA_i^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left(MM'^2 + M'A_i^2 + 2\left\langle \overrightarrow{MM'} / \overrightarrow{M'A_i} \right\rangle\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i MM'^2 + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i M'A_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left\langle \overrightarrow{MM'} / \overrightarrow{M'A_i} \right\rangle \\ &= \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\right) MM'^2 + f(M') + 2\left\langle \overrightarrow{MM'} / \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{M'A_i} \right\rangle \end{aligned}$$

Ce que nous voulions

16.6.3 Théorème

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien. On considère une famille finie de points pondérés $\{(A_i, \alpha_i)$ avec $1 \leqslant i \leqslant n\}$ et f est la fonction scalaire de Leibniz associée.

1. **Si la somme des coefficients est nulle, c'est à dire si $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 0$, alors le barycentre du système pondéré $\{(A_i, \alpha_i)$ avec $1 \leqslant i \leqslant n\}$ n'existe pas et $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{MA_i}$ est un vecteur constant pour tout $M \in \mathcal{E}$ et posons $\overrightarrow{a} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{MA_i}$. Alors :**
   Pour tout $M \in \mathcal{E}$ et $M' \in \mathcal{E}$, nous avons $f(M) = f(M') + 2\left\langle \overrightarrow{MM'} / \overrightarrow{a} \right\rangle$
2. **Si la somme des coefficients est non nulle, c'est à dire si $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \neq 0$, alors le barycentre G du système pondéré $\{(A_i, \alpha_i)$ avec $1 \leqslant i \leqslant n\}$ existe. Alors :**
   Pour tout $M \in \mathcal{E}$ nous avons $f(M) = f(G) + \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\right) MG^2$

Démonstration

1. Supposons donc $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 0$
   Alors, d'après 16.6.2, nous avons $f(M) = f(M') + 2\left\langle \overrightarrow{MM'} / \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{M'A_i} \right\rangle$. Or, $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{M'A_i} = \overrightarrow{a}$ où $\overrightarrow{a}$ est un vecteur constant.
   Nous avons donc $f(M) = f(M') + 2\left\langle \overrightarrow{MM'} / \overrightarrow{a} \right\rangle$
2. Supposons maintenant que $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \neq 0$
   Alors le système pondéré $\{(A_i, \alpha_i)$ avec $1 \leqslant i \leqslant n\}$ admet un barycentre G. Toujours d'après 16.6.2, nous pouvons écrire :
   $$f(M) = f(G) + 2\left\langle \overrightarrow{MG} / \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{GA_i} \right\rangle + \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\right) MG^2$$
   Or, $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = \overrightarrow{0}$. Donc $f(M) = f(G) + \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\right) MG^2$

16.6.4 Théorème

Soient $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien, une famille finie de points pondérés $\{(A_i, \alpha_i)$ avec $1 \leqslant i \leqslant n\}$ et f est la fonction scalaire de Leibniz associée.
Soit $k \in \mathbb{R}$ et $S_k = f^{-1}(\{k\}) = \left\{ M \in \mathcal{E} \text{ tels que } \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left\| \overrightarrow{MA_i} \right\|^2 = k \right\}$. Alors :

1. **Si $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \neq 0$, alors :**
   - $S_k = \emptyset$
   - **Ou bien $S_k = \{G\}$**
   - **Ou bien $S_k = \left\{ M \in \mathcal{E} \text{ tels que } \left\| \overrightarrow{MA_i} \right\|^2 = \dfrac{k - f(G)}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i} \right\}$**

2. Si $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 0$, alors :
- $S_k = \emptyset$
- **Ou bien $S_k = \mathcal{E}$**
- **Ou bien S_k est un hyperplan affine**

Démonstration

1. Si $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \neq 0$

   Alors, d'après 16.6.3, nous avons : $f(M) = f(G) + \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\right) MG^2$ et donc

$$M \in S_k \iff f(G) + \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\right) MG^2 = k \iff MG^2 = \frac{k - f(G)}{\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\right)}$$

   Ainsi, nous pouvons considérer 3 cas :
   - Si $\dfrac{k - f(G)}{\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\right)} < 0$, alors $S_k = \emptyset$
   - Si $\dfrac{k - f(G)}{\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\right)} = 0$, alors $S_k = \{G\}$
   - Si $\dfrac{k - f(G)}{\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\right)} > 0$, alors $S_k = \left\{ M \in \mathcal{E} \text{ tels que } \left\|\overrightarrow{MA_i}\right\|^2 = \dfrac{k - f(G)}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i} \right\}$

2. Si $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 0$

   Soit $O \in \mathcal{E}$ un point quelconque de $\mathcal{E}$.
   Alors, toujours d'après 16.6.3, et pour tout $M \in \mathcal{E}$, nous avons :$f(M) = f(O) + 2\left\langle \overrightarrow{MO} / \overrightarrow{a} \right\rangle$ où $\overrightarrow{a}$ est un vecteur indépendant des choix de O et de M.
   Nous avons :

$$M \in S_k \iff f(O) + 2\left\langle \overrightarrow{MO} / \overrightarrow{a} \right\rangle = k \iff \frac{k - f(O)}{2} = \left\langle \overrightarrow{MO} / \overrightarrow{a} \right\rangle$$

   - Si $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}$ et $\dfrac{k - f(O)}{2} \neq 0$, alors $S_k = \emptyset$
   - Si $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}$ et $\dfrac{k - f(O)}{2} = 0$, alors l'équation $\dfrac{k - f(O)}{2} = \left\langle \overrightarrow{MO} / \overrightarrow{a} \right\rangle$ est vérifiée pour tout $M \in \mathcal{E}$ et $S_k = \mathcal{E}$
   - Supposons $\overrightarrow{a} \neq \overrightarrow{0}$.
     Soit D la droite de $\mathcal{E}$ passant par O et de vecteur directeur $\overrightarrow{a}$. Pour tout point $H \in D$, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{OH} = \lambda \overrightarrow{a}$. Existe-t-il $H_0 \in D$ tel que $H_0 \in S_k$?
     Posons $\overrightarrow{OH_0} = \lambda_0 \overrightarrow{a}$. Alors

$$\frac{k - f(O)}{2} = \left\langle \overrightarrow{H_0O} / \overrightarrow{a} \right\rangle = \left\langle -\lambda_0 \overrightarrow{a} / \overrightarrow{a} \right\rangle = -\lambda_0 \left\langle \overrightarrow{a} / \overrightarrow{a} \right\rangle = -\lambda_0 \left\| \overrightarrow{a} \right\|^2$$

D'où nous tirons $\lambda_0 = \dfrac{f(O) - k}{2\left\|\overrightarrow{a}\right\|^2}$
Donc $H_0 \in D$ existe et même, H_0 est unique.
Pour $M \in \mathcal{E}$, nous avons :

$$\left\langle \overrightarrow{MO} / \overrightarrow{a} \right\rangle = \left\langle \overrightarrow{MH_0} + \overrightarrow{H_0O} / \overrightarrow{a} \right\rangle = \left\langle \overrightarrow{MH_0} / \overrightarrow{a} \right\rangle + \left\langle \overrightarrow{H_0O} / \overrightarrow{a} \right\rangle = \left\langle \overrightarrow{MH_0} / \overrightarrow{a} \right\rangle + \frac{k - f(O)}{2}$$

Donc :

$$M \in S_k \iff \left\langle \overrightarrow{MO} / \overrightarrow{a} \right\rangle = \frac{k - f(O)}{2} = \left\langle \overrightarrow{MH_0} / \overrightarrow{a} \right\rangle + \frac{k - f(O)}{2} \iff \left\langle \overrightarrow{MH_0} / \overrightarrow{a} \right\rangle = 0$$

Donc $M \in S_k \iff S_k \perp \overrightarrow{a}$
S_k est donc l'hyperplan orthogonal à $\overrightarrow{a}$ passant par H_0

Remarque 16 :

1. Si $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 0$
   (a) Si $\mathcal{E}$ est de dimension 2, autrement dit, dans le plan affine $\mathcal{P}$, S_k peut être une droite affine
   (b) Si $\mathcal{E}$ est de dimension 3, S_k peut être un plan affine
2. Lorsque $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \neq 0$
   (a) Si $\mathcal{E}$ est de dimension 2, autrement dit, dans le plan affine $\mathcal{P}$, S_k est un cercle de centre G et de rayon $R = \sqrt{\dfrac{k - f(G)}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i}}$
   (b) Si $\mathcal{E}$ est de dimension 3, S_k est une sphère de centre G et de rayon $R = \sqrt{\dfrac{k - f(G)}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i}}$

Exercice résolu

A et B sont 2 points distincts de l'espace affine $\mathcal{E}$. C est le milieu du segment $[A;B]$.
Etudier, en fonction des réels m et k l'ensemble S des points $M \in \mathcal{E}$ tels que :

$$MA^2 + mMB^2 - 2MC^2 = k$$

Examiner les cas où $m = 3$ et $k = AB^2$ L'ensemble S est la surface de niveau k de la fonction numérique de Leibniz F associée au système pondéré $\{(A,1);(B,m);(C,-2)\}$

1. Si la masse totale est nulle, c'est à dire si $1 + m - 2 = 0 \iff m = 1$, alors le vecteur $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}$ est constant, et nous avons :

$$\overrightarrow{a} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{0}$$

   D'après 16.6.3, nous avons, pour tout $M \in \mathcal{E}$, $f(M) = f(A) + 2\left\langle \overrightarrow{MM'} / \overrightarrow{0} \right\rangle = f(A)$

   Or, $f(A) = AA^2 + AB^2 - 2AC^2 = AB^2 - 2 \times \left(\dfrac{AB}{2}\right)^2 = \dfrac{AB^2}{2}$

   Ainsi, pour tout $M \in \mathcal{E}$, $f(M) = \dfrac{AB^2}{2}$ D'où

   ⋆ Si $k \neq \dfrac{AB^2}{2}$, alors $S = \emptyset$

- ⋆ Si $k = \dfrac{AB^2}{2}$, alors $S = \mathcal{E}$

2. Supposons $m \neq 1$, c'est à dire que le système pondéré $\{(A,1)\,;(B,m)\,;(C,-2)\}$ admet un barycentre G, et d'après 16.6.3, nous avons $f(M) = f(G) + (m-1)\,MG^2$ et donc $S = \left\{M \in \mathcal{E} \text{ tels que } MG^2 = \dfrac{k-f(G)}{m-1}\right\}$, et nous retrouvons les résultats :
   - ⋆ Si $\dfrac{k-f(G)}{m-1} > 0$, S est la sphère de centre G et de rayon $R = \sqrt{\dfrac{k-f(G)}{m-1}}$
   - ⋆ Si $\dfrac{k-f(G)}{m-1} = 0$, S est réduit au point G, c'est à dire $S = \{G\}$
   - ⋆ Si $\dfrac{k-f(G)}{m-1} < 0$, $S = \emptyset$
3. Supposons $m = 3$ et $k = AB^2$
   Le barycentre G vérifie, pour tout $M \in \mathcal{E}$:
   $$\overrightarrow{MG} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}\right)$$
   En particulier si $M = A$, nous avons $\overrightarrow{AG} = \dfrac{1}{2}\left(3\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}\right) = \dfrac{1}{2}\left(3\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AB}\right) = \overrightarrow{AB}$ et donc $G = B$
   D'où $f(G) = BA^2 + 3BB^2 - 2BC^2 = \dfrac{AB^2}{2}$.
   Donc $\dfrac{k-f(G)}{m-1} = \dfrac{AB^2 - \frac{AB^2}{2}}{2} = \dfrac{AB^2}{4}$
   S est donc la sphère de centre B et de rayon $\dfrac{AB}{2} = BC$

16.6.5 Exercices

Exercice 27 :

Quel est, dans $\mathbb{C}$, ensemble des nombres complexes, les nombres vérifiant :

$$2\left|z-i\right|^2 - 3\left|z-(1-i)\right|^2 + 4\left|z-1\right|^2 = 5$$

Exercice 28 :

On considère un espace affine quelconque $\mathcal{E}$, A et B, 2 points de $\mathcal{E}$. Quel est l'ensemble des points $M \in \mathcal{E}$ tels que $\left\langle \overrightarrow{MA} / \overrightarrow{MB} \right\rangle = 0$

Exercice 29 :

Nous nous situons dans le plan $\mathcal{P}$, espace affine de dimension 2
Considérons un carré $ABCD$.

1. Démontrer que l'ensemble des points $M \in \mathcal{P}$ tels que :
   $$\left\langle \left(\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}\right) / \left(\overrightarrow{MC} + 3\overrightarrow{MD}\right) \right\rangle = 0$$
   est un cercle.
2. Trouver l'ensemble des points $M \in \mathcal{P}$ tels que :
   $$\left\langle \left(\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}\right) / \left(\overrightarrow{MC} + 3\overrightarrow{MD}\right) \right\rangle = k$$
   Où k est un réel donné. Discuter suivant les valeurs de $k \in \mathbb{R}$
3. Trouver l'ensemble des points $M \in \mathcal{P}$ tels que :
   $$\left\|\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}\right\| = \left\|\overrightarrow{MC} + 3\overrightarrow{MD}\right\|$$

Exercice 30 :

Nous nous situons dans le plan $\mathcal{P}$, espace affine de dimension 2
Considérons un carré $ABCD$ de côté 5

1. Trouver l'ensemble des points $M \in \mathcal{P}$ tels que on ait l'égalité :
$$3MA^2 + 2MB^2 = 3MC^2 + 2MD^2$$
2. Trouver l'ensemble des points $M \in \mathcal{P}$ qui vérifient l'égalité :
$$3MA^2 + 2MB^2 = 3MC^2 + 2MD^2 = 135$$
3. Trouver l'ensemble des points $M \in \mathcal{P}$ tels que
$$3MA^2 + 2MB^2 = 3MC^2 + 2MD^2 = k$$
Où k est un réel donné. Discuter suivant les valeurs de $k \in \mathbb{R}$

Exercice 31 :

Nous nous situons dans le plan $\mathcal{P}$, espace affine de dimension 2
Considérons un triangle ABC.
Quel est le point $M \in \mathcal{P}$ pour lequel la somme $MA^2 + MB^2 + MC^2$ soit minimale ?

Exercice 32 :

Nous nous situons dans le plan $\mathcal{P}$, espace affine de dimension 2
Considérons un triangle ABC non équilatéral, et nous appelons G le centre de gravité.
On pose $a = BC$, $b = CA$ et $c = AB$

1. Démontrer que $GA^2 = \dfrac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{9}$
2. En déduire la valeur de $\left(b^2 - c^2\right) GA^2 + \left(c^2 - a^2\right) GB^2 + \left(a^2 - b^2\right) GC^2$
3. Trouver l'ensemble des points $M \in \mathcal{P}$ tels que
$$\left(b^2 - c^2\right) MA^2 + \left(c^2 - a^2\right) MB^2 + \left(a^2 - b^2\right) MC^2 = 0$$

Exercice 33 :

Nous nous situons dans le plan $\mathcal{P}$, espace affine de dimension 2

1. Soit ABC un triangle rectangle en A et nous posons $BC = 2a$.
Etudier, suivant les valeurs du réel $k \in \mathbb{R}$, l'ensemble des points $M \in \mathcal{P}$ qui vérifient l'égalité :
$$4MA^2 - MB^2 - MC^2 = k$$
Préciser l'ensemble lors que $k = 4a^2$
2. Soit ABC un triangle rectangle isocèle en A et nous posons $AC = BA = a$
Déterminer l'ensemble des points $M \in \mathcal{P}$ qui vérifient :
$$MA^2 - MB^2 + MC^2 \leqslant a^2$$