16.7 Exercices corrigés

16.7.1 Exercices issus du cours sur le calcul barycentrique

Exercice 1 :

Montrer que si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, alors $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$. Avons nous la réciproque ?

Facile !! Il faut utiliser la relation de Chasles :

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}$$

De l'hypothèse $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, nous avons $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{0}$. D'où le résultat, et la réciproque est évidente !!

Exercice 4 :

Donner une représentation paramétrique et une équation cartésienne des plans $(A, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ où
$A(1,2,1)$ $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ *et* $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

1. Equation paramétrique

   Soit $M \in (A, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$; on pose $M(x,y,z)$. Alors, $\overrightarrow{AM} = \lambda u + \mu v$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\mu \in \mathbb{R}$. Comme $\overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \\ z-1 \end{pmatrix}$ et donc nous avons :

$$\left\{\begin{array}{rl} x-1= & 2\lambda+3\mu \\ y-2= & \lambda+\mu \\ z-1= & -2\lambda \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rl} x= & 2\lambda+3\mu+1 \\ y= & \lambda+\mu+2 \\ z= & -2\lambda+1 \end{array}\right. \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{R} \text{ et } \mu \in \mathbb{R}$$

2. Equation cartésienne

   Nous utilisons, dans cette question le déterminant.

$$M \in (A, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \iff \det\left(\overrightarrow{AM}, u, v\right) = 0$$

   Nous avons :

$$\begin{aligned} \det\left(\overrightarrow{AM}, u, v\right) &= \begin{vmatrix} x-1 & 2 & 3 \\ y-2 & 1 & 1 \\ z-1 & -2 & 0 \end{vmatrix} \\ &= (x-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} - (y-2)\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} + (z-1)\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 2(x-1) - 6(y-2) - (z-1) \\ &= 2x - 6y - z + 11 \end{aligned}$$

   L'équation cartésienne du plan $(A, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est donc $2x - 6y - z + 11 = 0$

Vous aurez remarqué que je n'ai pas corrigé la totalité de l'exercice ; les autres items se résolvent de la même manière

Exercice 5 :

Le plan affine $\mathcal{P}$ est muni d'un repère cartésien $\mathcal{R}(O, i, j)$. A tout réel $m \in \mathbb{R}$, nous associons la droite D_m d'équation :

$$(2m-1)x + (3-m)y - 7m + 6 = 0$$

1. *Déterminer $m \in \mathbb{R}$ tel que :*

(a) *D_m soit parallèle à l'axe des abscisses*

Le vecteur directeur des droites D_m est du type $u_m = \begin{pmatrix} m-3 \\ 2m-1 \end{pmatrix}$. Pour que D_m soit parallèle à l'axe des abscisses, il faut que u_m soit colinéaire à i et donc que $\det(u_m, i) = 0$. Or :

$$\det(u_m, i) = \begin{vmatrix} m-3 & 1 \\ 2m-1 & 0 \end{vmatrix} = 1 - 2m$$

Donc D_m est parallèle à l'axe des abscisses si et seulement si $m = \frac{1}{2}$. C'est donc la droite d'équation $\frac{5}{2}y + \frac{5}{2} = 0 \iff y + 1 = 0$

(b) *D_m soit parallèle à l'axe des ordonnées*

Le problème est identique !!
Pour que D_m soit parallèle à l'axe des ordonnées, il faut que u_m soit colinéaire à j et donc que $\det(u_m, j) = 0$. Or :

$$\det(u_m, j) = \begin{vmatrix} m-3 & 0 \\ 2m-1 & 1 \end{vmatrix} = m - 3$$

Donc D_m est parallèle à l'axe des ordonnées si et seulement si $m = 3$. C'est donc la droite d'équation $5x - 15 = 0 \iff x - 3 = 0$

(c) *D_m passe par le point $A(1,1)$*

Nous devons donc avoir, $A \in D_m$, c'est à dire en remplaçant x et y par leur valeur :

$$(2m-1) + (3-m) - 7m + 6 = 0 \iff -6m + 8 = 0 \iff m = \frac{4}{3}$$

Donc, la droite $D_{\frac{4}{3}}$ d'équation $\frac{5}{3}x + \frac{5}{3}y - \frac{10}{3} = 0 \iff x + y - 2 = 0$ passe par le point $A(1,1)$

(d) *D_m soit parallèle à la droite d'équation $2x + 3y - 1 = 0$*

Il n'y a pas de grande différence avec les questions précédentes : il faut donc que le vecteur directeur de D_m soit colinéaire à celui de la droite d'équation $2x + 3y - 1 = 0$; or, ce vecteur directeur est $v = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$

Ces 2 vecteurs sont colinéaires si et seulement si $\det(u_m, v) = 0$. Or :

$$\det(u_m, v) = \begin{vmatrix} m-3 & -3 \\ 2m-1 & 2 \end{vmatrix} = 2m - 6 + 3(2m-1) = 8m - 9$$

Donc D_m est parallèle à lla droite d'équation $2x + 3y - 1 = 0$ si et seulement si $m = \frac{9}{8}$. C'est donc la droite d'équation $\frac{10}{8}x + \frac{15}{8}y - \frac{15}{8} = 0 \iff 2x + 3y - 3 = 0$

2. *Démontrez que toutes les droites D_m passent par un point fixe F dont on précisera les coordonnées.*

On appelle (x_F, y_F) les coordonnées de F. Nous devons donc avoir, pour tout $m \in \mathbb{R}$

$$(2m-1)x_F + (3-m)y_F - 7m + 6 = 0 \iff m(2x_F - y_F - 7) + (3y_F - x_F + 6) = 0$$

Ce qui nous conduit au système :

$$\begin{cases} 2x_F - y_F - 7 = & 0 \\ 3y_F - x_F + 6 = & 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x_F - y_F = & 7 \\ -x_F + 3y_F = & -6 \end{cases}$$

D'où nous tirons $x_F = 3$ et $y_F = -1$. Le point $F(3, -1)$ est donc le point fixe des droites D_m

Exercice 6 :

Le plan affine $\mathcal{P}$ est muni d'un repère cartésien $\mathcal{R}(O, i, j)$.
A tout réel $m \in \mathbb{R}$, nous associons les droites D_m et Δ_m d'équation :

$$D_m : \quad (m+2)\,x + (3-2m)\,y + 3m - 8 = 0$$
$$\Delta_m : \quad (9m-3)\,x + (10-8m)\,y - 8m - 2 = 0$$

1. *Démontrez que toutes les droites D_m passent par un point fixe A dont on précisera les coordonnées.*

   C'est simple et ressemble à l'exercice précédent.
   On appelle (x_A, y_A) les coordonnées de A. Nous devons donc avoir, pour tout $m \in \mathbb{R}$

   $$(m+2)\,x_A + (3-2m)\,y_A + 3m - 8 = 0 \iff m\,(x_A - 2y_A + 3) + (2x_A + 3y_A - 8) = 0$$

   Ce qui nous conduit au système :

   $$\begin{cases} x_A - 2y_A + 3 = & 0 \\ 2x_A + 3y_A - 8 = & 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_A - 2y_A = & -3 \\ 2x_A + 3y_A = & 8 \end{cases}$$

   D'où nous tirons $x_A = 1$ et $y_A = 2$. Le point $A\,(1, 2)$ est donc le point fixe des droites D_m
2. *Démontrez que toutes les droites Δ_m passent par un point fixe B dont on précisera les coordonnées.*

   On remet ça !!
   On appelle (x_B, y_B) les coordonnées de B. Nous devons donc avoir, pour tout $m \in \mathbb{R}$

   $$(9m-3)\,x_B + (10-8m)\,y_B - 8m - 2 = 0 \iff m\,(9x_B - 8y_B - 8) + (-3x_B + 10y_B - 2) = 0$$

   Ce qui nous conduit au système :

   $$\begin{cases} 9x_B - 8y_B - 8 = & 0 \\ -3x_B + 10y_B - 2 = & 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 9x_B - 8y_B = & 8 \\ -3x_B + 10y_B = & 2 \end{cases}$$

   D'où nous tirons $x_B = \dfrac{16}{11}$ et $y_B = \dfrac{7}{11}$. Le point $B\left(\dfrac{16}{11}, \dfrac{7}{11}\right)$ est donc le point fixe des droites Δ_m
3. *Est-il possible de trouver $m \in \mathbb{R}$ tel que $D_m = \Delta_m$?*

   La question est mal posée ; elle sous-entend qu'il n'y a qu'un seul $m \in \mathbb{R}$ tel que $D_m = \Delta_m$; or , il n'en est rien.
   Raisonnons !! Si les familles de droites D_m et Δ_m ont des droites communes, elles passent forcément par les points A et B et à ce moment là, nous avons $D_m = \Delta_m = (AB)$. C'est donc la droite (AB) qui est la droite commune aux D_m et aux Δ_m
   - ▷ Recherchons $m_0 \in \mathbb{R}$ tel que la droite D_{m_0} passent par B. Comme toutes les droites D_m passent par A, nous aurons $D_{m_0} = (AB)$.
     Mettons dans l'équation de D_m les coordonnées de B.

     $$\begin{aligned} \frac{16}{11}(m+2) + \frac{7}{11}(3-2m) + 3m - 8 = 0 \iff & \quad m\left(\frac{16}{11} - \frac{14}{11} + 3\right) + \left(\frac{32}{11} + \frac{21}{11} - 8\right) = 0 \\ \iff & \quad \frac{35}{11}m + \frac{35}{11} = 0 \\ \iff & \quad m = -1 \end{aligned}$$

     Donc la droite D_{-1} est aussi la droite (AB)
   - ▷ Recherchons $m_1 \in \mathbb{R}$ tel que la droite D_{m_1} passent par A. Comme toutes les droites Δ_m passent par B, nous aurons $\Delta_{m_1} = (AB)$.
     Mettons dans l'équation de Δ_m les coordonnées de A.

     $$\begin{aligned} (9m-3) + 2\,(10-8m) - 8m - 2 = 0 \iff & \quad m\,(9 - 16 - 8) + (-3 + 20 - 2) = 0 \\ \iff & \quad -15m + 15 = 0 \\ \iff & \quad m = 1 \end{aligned}$$

     Donc la droite Δ_1 est aussi la droite (AB)
   - ▷ En conclusion, nous avons $D_{-1} = \Delta_1 = (AB)$

   Ce sont bien des $m \in \mathbb{R}$ différents, mais, c'est une même droite !!

Exercice 7 :

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de dimension quelconque
Un triangle $\{ABC\}$ de l'espace $\mathcal{E}$ étant donné, on considère l'application f de $\mathcal{E}$ dans E qui, à à tout point $M \in \mathcal{E}$, associe le vecteur : $\overrightarrow{f(M)} = -5\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}$.

1. *Pour tout bipoint (M, M') démontrer que $\overrightarrow{f(M)} - \overrightarrow{f(M')} = -2\overrightarrow{MM'}$*

   Il suffit de refaire la démonstration du cours en utilisant la relation de Chasles
   $$\overrightarrow{f(M)} - \overrightarrow{f(M')} = -5\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} + 5\overrightarrow{M'A} - \overrightarrow{M'B} - 2\overrightarrow{M'C} = -2\overrightarrow{MM'}$$

   Existe-t-il un point $G \in \mathcal{E}$ tel que $\overrightarrow{f(G)} = \overrightarrow{0}$?

   Si ce point G existe, alors $-5\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + 2\overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$; donc, comme
   $$\begin{aligned}\overrightarrow{0} = -5\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + 2\overrightarrow{GC} &= 5\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GB} + 2\overrightarrow{GC} \\ &= \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GB} + 2\overrightarrow{AG} + 2\overrightarrow{GC} + 2\overrightarrow{AG} \\ &= \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{AG}\end{aligned}$$

   D'où nous déduisons $2\overrightarrow{AG} = -\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC} \Longleftrightarrow \overrightarrow{AG} = \dfrac{-1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$
   Ce point G existe donc !!
   Exprimer alors le vecteur $\overrightarrow{f(M)}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{MG}$

   De l'identité $\overrightarrow{f(M)} - \overrightarrow{f(M')} = -2\overrightarrow{MM'}$, en remplaçant M' par G, nous avons :
   $$\overrightarrow{f(M)} = -2\overrightarrow{MG}$$

2. *Montrer que G appartient au plan (ABC) et déterminer sa position avec précision en indiquant ses coordonnées dans un repère bien choisi du plan (ABC).*

   Nous avons $\overrightarrow{AG} = \dfrac{-1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$, ce qui montre bien que G est dans le plan (ABC).

   En choisissant comme repère affine $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$, G a pour coordonnées $\left(\dfrac{-1}{2}, -1\right)$

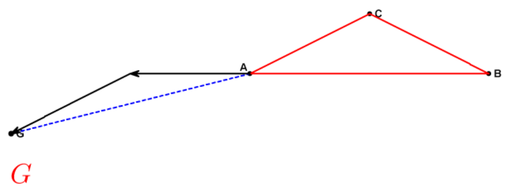

FIGURE 16.6 – Une représentation de G dans le plan (ABC)

3. *Application :*

   (a) *A tout point $M \in \mathcal{E}$ distinct de G, on associe la droite D_M passant par M et de vecteur directeur $\overrightarrow{f(M)}$. Démontrer que les droites D_M passent par un point fixe.*

   Redéfinissons D_M :
   $$D_M = \left\{X \in \mathcal{E} \text{ tels que } \overrightarrow{MX} = \lambda\overrightarrow{f(M)}\right\} = \left\{X \in \mathcal{E} \text{ tels que } \overrightarrow{MX} = \lambda\overrightarrow{MG}\right\}$$

   Ce quimontre que les points X, M et G sont alignés.
   Toutes les droites passent donc par G

(b) *A tout point $M \in \mathcal{E}$, on associe le point M' tel que $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{f}(M)$ Reconnaître l'application g qui à M fait correspondre M'*

Par définition, nous avons donc :

$$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{f}(M) \iff \overrightarrow{MM'} = -2\overrightarrow{MG} \iff \overrightarrow{GM'} = 3\overrightarrow{GM}$$

g est donc une homothétie de centre G et de rapport 3

Exercice 8 :

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de dimension quelconque.
Nous considérons le système de points pondérés $\{(A_1, \alpha), (A_2, \alpha), (A_3, \alpha) \cdots (A_n, \alpha)\}$ avec $\alpha \neq 0$.
Montrer que si G est l'isobarycentre du système, alors, pour tout point $O \in \mathcal{E}$, nous avons

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{OA_i}$$

Voilà une démonstration qui ne pose pas de difficulté.
Pour tout point $O \in \mathcal{E}$, nous avons $\overrightarrow{OG} = \dfrac{1}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\alpha}\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\alpha\overrightarrow{OA_i}\right) = \dfrac{\alpha}{n\alpha}\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{OA_i}\right)$

Ce que nous voulions

Exercice 9 :

Soient A, B et C 3 points du plan affine, d'affixe respective $z_A = 1 + i$, $z_B = -1 + i$ et $z_C = i$
Quelle est l'affixe z_G du barycentre du système pondéré $\{(A, 1), (B, -4), (C, +5)\}$

En revenant sur les propriétés des barycentres, G étant celui du système pondéré $\{(A, 1), (B, -4), (C, +5)\}$, pour tout point $O \in \mathcal{P}$, nous avons :

$$\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA} - 4\overrightarrow{OB} + 5\overrightarrow{OC}$$

En particulier si O est l'origine, nous pouvons passer aux affixes, et :

$$z_G = z_A - 4z_B + 5z_C = 1 + i - 4(-1 + i) + 5i = 5 + 2i$$

Donc $z_G = 5 + 2i$

Exercice 10 :

Dans le plan affine $\mathcal{P}$, on se donne deux points distincts A et B

1. *Quelles sont les conditions sur $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R}$ pour qu'il existe $M' \in \mathcal{P}$ tel que :*

$$\alpha\overrightarrow{M'A} + \beta\overrightarrow{M'B} + 2\overrightarrow{MM'} = 0$$

   M' apparaît comme le barycentre du système pondéré $\{(A, \alpha); (B, \beta); (M, 2)\}$.
   Ainsi, pour que M' existe, il faut que $\alpha + \beta + 2 \neq 0$, c'est à dire $\alpha + \beta \neq -2$

2. *Ces conditions étant réalisées, soit f l'application du plan $\mathcal{P}$, qui à $M \in \mathcal{P}$ associe $M' \in \mathcal{P}$.*
   Déterminer suivant les valeurs du couple (α, β) l'ensemble des points invariants par f

   En utilisant les résultats sur les barycentres, nous avons, pour tout point $X \in \mathcal{P}$:

$$\overrightarrow{XM'} = \frac{1}{\alpha + \beta + 2}\left(\alpha\overrightarrow{XA} + \beta\overrightarrow{XB} + 2\overrightarrow{XM}\right)$$

En particulier si $X = M$:

$$\overrightarrow{MM'} = \frac{1}{\alpha+\beta+2}\left(\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB}\right)$$

Et si M est invariant par f, alors $M = M'$ et donc :

$$\frac{1}{\alpha+\beta+2}\left(\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB}\right) = \overrightarrow{0} \iff \alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{0}$$

Or :

$$\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{0} \iff \alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0} \iff (\alpha+\beta)\overrightarrow{MA} = -\beta\overrightarrow{AB}$$

Ainsi :

- Si $\alpha + \beta = 0$, nous devrions avoir $-\beta\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0}$, ce qui est impossible. Il ne peut donc y avoir de point fixe
- Si $\alpha + \beta \neq 0$ il existe donc un seul point I invariant par f, défini par $\overrightarrow{AI} = \dfrac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$.

  On peut faire remarquer que nous avons aussi la relation $(\alpha+\beta)\overrightarrow{AI} = \beta\overrightarrow{AB}$

3. *On suppose $\alpha + \beta = 0$; Quelle est la nature de f ?*

   Alors, nous avons $\beta = -\alpha$ et nous pouvons écrire, pour tout point $X \in \mathcal{P}$:

$$\overrightarrow{XM'} = \frac{1}{2}\left(\alpha\overrightarrow{XA} - \alpha\overrightarrow{XB} + 2\overrightarrow{XM}\right) \iff 2\overrightarrow{XM'} = \alpha\overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{XM}$$

   Ce qui nous done : $2\overrightarrow{XM'} = \alpha\overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{XM'} + 2\overrightarrow{M'M} \iff \overrightarrow{MM'} = \dfrac{\alpha}{2}\overrightarrow{BA}$

   f est donc une translation de vecteur $\dfrac{\alpha}{2}\overrightarrow{BA}$

4. *On suppose $\alpha + \beta \neq 0$; Quelle est la nature de f ?*

   Nous pouvons écrire, pour tout point $X \in \mathcal{P}$:

$$\overrightarrow{XM'} = \frac{1}{\alpha+\beta+2}\left(\alpha\overrightarrow{XA} + \beta\overrightarrow{XB} + 2\overrightarrow{XM}\right)$$

   En remplaçant, en particulier X par I, le point invariant, nous avons :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{IM'} &= \frac{1}{\alpha+\beta+2}\left(\alpha\overrightarrow{IA} + \beta\overrightarrow{IB} + 2\overrightarrow{IM}\right) \\
&= \frac{1}{\alpha+\beta+2}\left(\alpha\overrightarrow{IA} + \beta\overrightarrow{IA} + \beta\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{IM}\right) \\
&= \frac{1}{\alpha+\beta+2}\left((\alpha+\beta)\overrightarrow{IA} + \beta\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{IM}\right) \\
&= \frac{1}{\alpha+\beta+2}\left(\beta\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{IM}\right) \\
&= \frac{2}{\alpha+\beta+2}\overrightarrow{IM}
\end{aligned}$$

   f est donc une homothétie de centre I et de rapport $\dfrac{2}{\alpha+\beta+2}$

Exercice 11 :

Dans le plan affine $\mathcal{P}$, on considère le triangle $\{A, B, C\}$

1. *Définir, par ses coordonnées dans le repère $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$ le barycentre G du système pondéré $\{(A,-2), (B,4), (C,1)\}$*

   Comme toujours, pour tout $M \in \mathcal{P}$, nous avons $\overrightarrow{MG} = \dfrac{1}{3}\left(-2\overrightarrow{MA} + 4\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right)$, et en faisant, en particulier $M = A$, nous avons :

$$\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\left(4\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)$$

D'où les coordonnées de G dans le repère $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$ sont $G\left(\dfrac{4}{3}, \dfrac{1}{3}\right)$

2. *Soit $M \in \mathcal{P}$ de coordonnées (x, y) dans le repère $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$*
Montrer que M est le barycentre du système pondéré $\{(A, 1-x-y), (B, x), (C, y)\}$

C'est très simple : il siffit d'écrire $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$. En réinjectant M, nous obtenons :

$$\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AM} + x\overrightarrow{MB} + y\overrightarrow{AM} + y\overrightarrow{MC} \Longleftrightarrow (1-x-y)\,\overrightarrow{AM} + x\overrightarrow{BM} + y\overrightarrow{CM}$$

Ainsi, M est le barycentre du système pondéré $\{(A, 1-x-y), (B, x), (C, y)\}$

Exercice 12 :

Soient $\mathcal{E}$ un espace affine de dimension quelconque et $A \in \mathcal{E}$ et $B \in \mathcal{E}$ tels que $A \neq B$. Soit M un point de la droite (AB) de coordonnées barycentriques dans le repère affine (A, B) (α, β).
Montrer que $M \in [A; B]$ si et seulement si $\alpha \times \beta \geqslant 0$

1. Supposons $M \in [A; B]$
Alors M apparaît donc comme le barycentre de la famille pondérée $\{(A, (1-t)); (B, t)\}$ avec $t \in [0; 1]$ et nous avons bien $t\,(1-t) \geqslant 0$.
Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$; M apparaît aussi comme le barycentre de la famille pondérée $\{(A, \lambda\,(1-t)); (B, \lambda t)\}$ avec $t \in [0; 1]$ et nous avons aussi $\lambda^2 t\,(1-t) \geqslant 0$.
2. Supposons $M \in \mathcal{E}$, de coordonnées barycentriques dans le repère affine (A, B) (α, β) telles que $\alpha \times \beta \geqslant 0$
Il faut remarquer que α et β sont de même signe, et quitte à les multiplier par -1, on peut les supposer tous les deux positifs.
M étant barycentre de $\{(A, \alpha)\,(B, \beta)\}$, nous pouvons écrire, pour tout $X \in \mathcal{E}$:
$$\overrightarrow{XM} = \frac{1}{\alpha+\beta}\left(\alpha\overrightarrow{XA} + \beta\overrightarrow{XB}\right)$$
En particulier si $X = A$, nous avons $\overrightarrow{AM} = \dfrac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$
Comme $0 \leqslant \dfrac{\beta}{\alpha+\beta} \leqslant 1$, nous avons bien $M \in [A; B]$
3. Prolongement
Si nous considérons un triangle $\{A, B, C\}$ et M un point de coordonnées barycentriques (α, β, γ) avec $\alpha+\beta+\gamma \neq 0$ dans le repère affine (A, B, C). **L'intérieur** du triangle $\{A, B, C\}$ est caractérisé par la relation $\alpha \times \beta \times \gamma \geqslant 0$

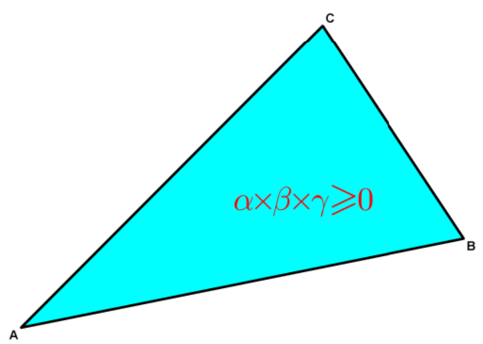

FIGURE 16.7 – Visualisation de l'intérieur d'un triangle $\{A, B, C\}$

16.7.2 Exercices sur le calcul barycentrique

Exercice 13 :

Soit $\mathcal{P}$ le plan affine, et A, B et C 3 points de $\mathcal{P}$. On désigne par G l'isobarycentre du triangle $\{A, B, C\}$, par A' le milieu du segment $[B, C]$, par B' le milieu du segment $[A, C]$ et par C' le milieu du segment $[A, B]$. On désigne aussi par A" le symétrique de A par rapport à A', par B" le symétrique de B par rapport à B' et par C" le symétrique de C par rapport à C'
Déterminer, dans le repère affine (A, B, C) un système de coordonnées barycentriques des points A, B, C, A', B', C', A", B" et C"

1. La première chose est de faire une figure

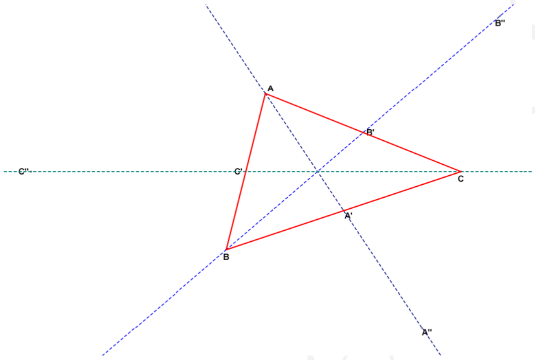

FIGURE 16.8 – Visualisation du problème

2. Recherche des coordonnées barycentriques dans le repère affine (A, B, C)
   (a) Pour le point A, c'est, évidemment $(1, 0, 0)$
   (b) Pour le point B, c'est, évidemment $(0, 1, 0)$
   (c) Pour le point C, c'est, évidemment $(0, 0, 1)$
   (d) Pour le point A', il faut considérer que A' est le milieu du segment $[B, C]$, donc $\overrightarrow{A'B}+\overrightarrow{A'C} = \overrightarrow{0}$ ou encore $0\overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{A'B} + \overrightarrow{A'C} = \overrightarrow{0}$
   Les coordonnées barycentriques de A' sont donc $(0, 1, 1)$
   (e) Pour le point B', c'est, de la même manière $(1, 0, 1)$
   (f) Pour le point C', c'est donc $(1, 1, 0)$
   (g) Pour le point A'', nous avons $\overrightarrow{A''A} = 2\overrightarrow{A''A'} \Longleftrightarrow -\overrightarrow{A''A} + 2\overrightarrow{A''A'} = \overrightarrow{0}$ et A'' apparaît comme le barycentre du système pondéré $\{(A, -1)\,;(A', 2)\}$; comme A' est l'isobarycentre de B et C, nous avons :$2\overrightarrow{A''A'} = \overrightarrow{A''B} + \overrightarrow{A''C}$
   $$-\overrightarrow{A''A} + 2\overrightarrow{A''A'} = \overrightarrow{0} \Longleftrightarrow -\overrightarrow{A''A} + \overrightarrow{A''B} + \overrightarrow{A''C} = \overrightarrow{0}$$
   Et donc A'' apparaît comme le barycentre du système pondéré $\{(A, -1)\,;(B, 1)\,,(C, 1)\}$.
   Les coordonnées barycentriques de A'' sont donc $(-1, 1, 1)$
   (h) Pour le point B'', c'est, de la même manière $(1, -1, 1)$
   (i) Pour le point C', c'est donc $(1, 1, -1)$

Exercice 14 :

Le plan $\mathcal{P}$ est muni d'un repère affine (A, B, C)

1. *R et S étant les deux points de coordonnées barycentriques respectives $(-1, 2, 1)$ et $(2, 1, -1)$. Démontrer qu'un point M de coordonnées barycentriques (a, b, c) appartient à la droite (RS) si et seulement si $-3a + b - 5c = 0$*
   ⋆ On ré-écrit les hypothèses :

- ▷ $\overrightarrow{AR} = \frac{1}{2}\left(2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right) = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$
- ▷ $\overrightarrow{AS} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\right) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$
- ▷ $\overrightarrow{AM} = \dfrac{1}{a+b+c}\left(b\overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{AC}\right)$

⋆ Si le point M est sur la droite (RS), il existe alors $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que $\overrightarrow{RM} = \lambda\overrightarrow{RS}$ Or :
- ▷ $\overrightarrow{RS} = \overrightarrow{AS} - \overrightarrow{AR} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$
- ▷ $\overrightarrow{RM} = \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AR} = \dfrac{-a-c}{a+b+c}\overrightarrow{AB} + \dfrac{c-a-b}{2(a+b+c)}\overrightarrow{AC}$

⋆ Nous devons donc avoir :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{-a-c}{a+b+c} &=& \dfrac{-\lambda}{2} \\ \dfrac{c-a-b}{2(a+b+c)} &=& -\lambda \end{array}\right. \Longrightarrow \frac{-2a-2c}{a+b+c} = \frac{c-a-b}{2(a+b+c)} \Longrightarrow -4a-4c = c-a-b \Longrightarrow -3a+b-5c = 0$$

⋆ Supposons que M soit un point de coordonnées barycentriques (a,b,c) telles que $-3a+b-5c = 0$. Montrons que M appartient à la droite (RS) en montrant que $\overrightarrow{RM} = \lambda\overrightarrow{RS}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$ est à trouver.
- ▷ Rappelons que $\overrightarrow{AR} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$, que $\overrightarrow{AS} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.
- ▷ Nous avons aussi $\overrightarrow{AM} = \dfrac{1}{a+b+c}\left(b\overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{AC}\right)$, et comme $-3a+b-5c = 0 \iff b = 3a+5c$, nous avons :$\overrightarrow{AM} = \dfrac{3a+5c}{4a+6c}\overrightarrow{AB} + \dfrac{c}{4a+6c}\overrightarrow{AC}$
- ▷ Nous avons :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{RM} &= \overrightarrow{RA} + \overrightarrow{AM} \\ &= -\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{3a+5c}{4a+6c}\overrightarrow{AB} + \frac{c}{4a+6c}\overrightarrow{AC} \\ &= \left(\frac{3a+5c}{4a+6c} - 1\right)\overrightarrow{AB} + \left(\frac{c}{4a+6c} - \frac{1}{2}\right)\overrightarrow{AC} \\ &= \frac{3a+5c-4a-6c}{4a+6c}\overrightarrow{AB} + \frac{2c-4a-6c}{8a+12c}\overrightarrow{AC} \\ &= \frac{-a-c}{4a+6c}\overrightarrow{AB} + \frac{-2c-2a}{4a+6c}\overrightarrow{AC} \\ &= \frac{-a-c}{4a+6c}\left(\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}\right) \end{aligned}$$

- ▷ Maintenant, nous avons :

$$\overrightarrow{RS} = \overrightarrow{RA} + \overrightarrow{AS} = -\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$$

C'est à dire que $\overrightarrow{RS} = -\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}\right)$ et nous démontrons ainsi que $\overrightarrow{RM} = \dfrac{a+c}{2a+3c}\overrightarrow{RS}$ et donc M appartient à la droite (RS)

2. (a) *Soit $\mathcal{D}$ l'ensemble des points M dont les coordonnées barycentriques (a,b,c) vérifient la relation $2a+b-c = 0$. Démontrer que $\mathcal{D}$ est une droite.*

Soit $X \in \mathcal{D}$ de coordonnées barycentriques $(1,1,3)$ et $Y \in \mathcal{D}$ de coordonnées barycentriques $(-1,1,-1)$.
Il suffit de démontrer, comme dans la question précédente, que, pour tout $M \in \mathcal{D}$, nous avons $\overrightarrow{XM} = \lambda\overrightarrow{XY}$

(b) *Déterminer un système de coordonnées barycentriques du point d'intersection des droites (RS) et $\mathcal{D}$*

Si M de coordonnées barycentriques (a,b,c) est le point d'intersection des droites (RS) et $\mathcal{D}$, nous avons :

$$\left\{\begin{array}{rcl} -3a+b-5c &=& 0 \\ 2a+b-c &=& 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} -3a+b &=& 5c \\ 2a+b &=& c \end{array}\right. \Longrightarrow a = \frac{-4c}{5} \text{ et } b = \frac{13c}{5}$$

M a pour coordonnées barycentriques $\left(\frac{-4c}{5}, \frac{13c}{5}, c\right)$ avec $c \in \mathbb{R}^*$ ou encore $(-4c, 13c, 5c)$ avec $c \in \mathbb{R}^*$

Exercice 15 :

Dans le plan $\mathcal{P}$, on considère 3 points A, B et C non alignés. Quel est l'ensemble des points $P \in \mathcal{P}$ définis par :

$$\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$$

lorsque M décrit une droite $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}$

Soit G l'isobarycentre de $\{A, B, C\}$. Alors, nous avons, pour tout $M \in \mathcal{P}$, $3\overrightarrow{MG} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$.
Donc, si $P \in \mathcal{P}$ est tel que

$$\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$$

, nous avons $\overrightarrow{MP} = 3\overrightarrow{MG}$
Or, $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GP}$, et nous avons donc :

$$\overrightarrow{MP} = 3\overrightarrow{MG} \Longleftrightarrow \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GP} = 3\overrightarrow{MG} \Longleftrightarrow \overrightarrow{GP} = -2\overrightarrow{GM}$$

Ainsi, la transformation qui à $M \in \mathcal{P}$ fait correspondre P tel que $\overrightarrow{GP} = -2\overrightarrow{GM}$ est une homothétie de rapport -2 et de centre G.
La transformée d'une droite, par une homothétie est une droite.

Exercice 16 :

Le plan $\mathcal{P}$ est muni d'un repère affine (A, B, C). On appelle A' le milieu du segment $[BC]$, B' le milieu du segment $[DC]$ et C' le milieu du segment $[BA]$.
α est un réel différent de 1 et nous désignons par I le barycentre du système pondéré $\{(B, 1)\,;(C, -\alpha)\}$
Déterminer les coordonnées barycentriques :

1. *De I dans le repère (A', B', C')*
2. *Du milieu M de $[AI]$ dans le repère (A', B', C')*

1. Pour tout point $O \in \mathcal{P}$, nous avons :

   ▷ $2\overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$
   ▷ $2\overrightarrow{OB'} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}$
   ▷ $2\overrightarrow{OC'} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA}$
   ▷ $(1-\alpha)\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{OB} - \alpha\overrightarrow{OC}$

   Donc, en utilisant ces différentes égalités, nous tirons :
   ▷ $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'} - \overrightarrow{OC'}$
   ▷ $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA'} - \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{OC'}$
   ▷ $\overrightarrow{OA} = -\overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{OC'}$
   Donc, $(1-\alpha)\overrightarrow{OI} = (1-\alpha)\overrightarrow{OA'} - (1+\alpha)\overrightarrow{OB'} + (1+\alpha)\overrightarrow{OC'}$
   Les coordonnées barycentriques de I dans le repère (A', B', C') sont donc : $\left(1, \frac{-(1+\alpha)}{1-\alpha}, \frac{1+\alpha}{1-\alpha}\right)$

2. Pour tout point $O \in \mathcal{P}$, nous avons $2\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{OA}$. En remplaçant par ce qui a été trouvé au-dessus, nous avons :

$$\begin{aligned}
2\overrightarrow{OM} &= \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{OA} \\
&= \overrightarrow{OA'} - \frac{(1+\alpha)}{1-\alpha}\overrightarrow{OB'} + \frac{(1+\alpha)}{1-\alpha}\overrightarrow{OC'} - \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{OC'} \\
&= -\left(\frac{(1+\alpha)}{1-\alpha} - 1\right)\overrightarrow{OB'} + \left(\frac{(1+\alpha)}{1-\alpha} + 1\right)\overrightarrow{OC'} \\
&= \frac{-2\alpha}{1-\alpha}\overrightarrow{OB'} + \frac{2}{1-\alpha}\overrightarrow{OC'}
\end{aligned}$$

   D'où $\overrightarrow{OM} = \frac{-\alpha}{1-\alpha}\overrightarrow{OB'} + \frac{1}{1-\alpha}\overrightarrow{OC'}$
   Les coordonnées barycentriques de M dans le repère (A', B', C') sont donc : $\left(0, \frac{-\alpha}{1-\alpha}, \frac{1}{1-\alpha}\right)$

Exercice 17 :

Soit $\{A, B, C\}$ un triangle. Trouver les coordonnées barycentriques, dans le repère affine (A, B, C)

1. *Des points situés sur les côtés du triangle*
2. *Des points situés sur la médiane issue de A*
3. *Des points situés sur la parallèle à (AC) passant par l'isobarycentre du triangle $\{A, B, C\}$*

Commençons par faire une figure :

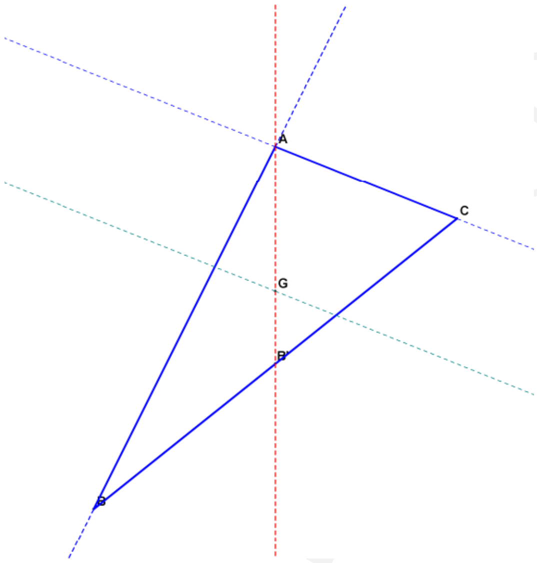

Figure 16.9 – Visualisation du problème

1. Nous n'allons nous intéresser qu'à la droite (AB)
   Si $M \in (AB)$, alors, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{AB}$
   Pour tout point $O \in \mathcal{P}$, nous avons : $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OM} = \lambda\overrightarrow{AO} + \lambda\overrightarrow{OB}$, c'est à dire $\overrightarrow{OM} = (1-\lambda)\overrightarrow{OA} + \lambda\overrightarrow{OB}$
   Ainsi, les coordonnées barycentriques des points situés sur la droite (AB), dans le repère affine (A, B, C), sont $((1-\lambda), \lambda, 0)$ où $\lambda \in \mathbb{R}$
2. Soit M un point situé sur la médiane issue de A. Alors,
   $\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{AA'}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.
   Pour tout point $O \in \mathcal{P}$, nous avons : $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OM} = \lambda\overrightarrow{AO} + \lambda\overrightarrow{OA'}$, c'est à dire $\overrightarrow{OM} = (1-\lambda)\overrightarrow{AO} + \lambda\overrightarrow{OA'}$
   Or, $2\overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$, et donc $\overrightarrow{OM} = (1-\lambda)\overrightarrow{OA} + \dfrac{\lambda}{2}\overrightarrow{OB} + \dfrac{\lambda}{2}\overrightarrow{OC}$
   Ainsi, les coordonnées barycentriques ,dans le repère affine (A, B, C), des points situés sur la médiane issue de A sont $\left((1-\lambda), \dfrac{\lambda}{2}, \dfrac{\lambda}{2}\right)$ où $\lambda \in \mathbb{R}$
3. Soit M un point situés sur la parallèle à (AC) passant par l'isobarycentre G du triangle $\{A, B, C\}$.
   Alors $\overrightarrow{GM} = \lambda\overrightarrow{AC}$
   Pour tout point $O \in \mathcal{P}$, nous avons : $\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OM} = \lambda\overrightarrow{AO} + \lambda\overrightarrow{OC}$
   D'autre part, pour tout point $O \in \mathcal{P}$, nous avons $3\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ et donc :

$$\overrightarrow{OM} = \left(\frac{1}{3} - \lambda\right)\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OB} + \left(\frac{1}{3} + \lambda\right)\overrightarrow{OC}$$

Ainsi, les coordonnées barycentriques ,dans le repère affine (A, B, C), des points situés sur la parallèle à (AC) passant par l'isobarycentre G du triangle $\{A, B, C\}$ sont $\left(\frac{1}{3}-\lambda, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}+\lambda\right)$ où $\lambda \in \mathbb{R}$

Exercice 18 :

Soient A, A', B et B' quatre points du plan $\mathcal{P}$ tels que les droites (AA') et (BB') se coupent en I et que les droites (AB) et $(A'B')$ se coupent en L
Les coordonnées barycentriques de I dans le repère (A, A') sont (α, α') et (β, β') dans le repère (B, B').
Quelles sont les coordonnées barycentriques de L dans les repères (A, B) et (A', B')

Dans ce corrigé, nous ne faisons pas de figure puisque cette figure est déjà dans l'énoncé.

⋆ I étant barycentre de $\{(A, \alpha); (A', \alpha')\}$, nous pouvons écrire, pour tout point $O \in \mathcal{P}$:

$$(\alpha+\alpha')\overrightarrow{OI} = \alpha\overrightarrow{OA} + \alpha'\overrightarrow{OA'}$$

⋆ De même, I est barycentre de $\{(B, \beta); (B', \beta')\}$, nous pouvons écrire, pour tout point $O \in \mathcal{P}$:

$$(\beta+\beta')\overrightarrow{OI} = \beta\overrightarrow{OB} + \beta'\overrightarrow{OB'}$$

⋆ Et donc, pour tout point $O \in \mathcal{P}$:

$$(\beta+\beta')\left(\alpha\overrightarrow{OA} + \alpha'\overrightarrow{OA'}\right) = (\alpha+\alpha')\left(\beta\overrightarrow{OB} + \beta'\overrightarrow{OB'}\right)$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\alpha(\beta+\beta')\overrightarrow{OA} - \beta(\alpha+\alpha')\overrightarrow{OB} = -\alpha'(\beta+\beta')\overrightarrow{OA'} + \beta'(\alpha+\alpha')\overrightarrow{OB'}$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\frac{1}{\alpha\beta'-\alpha\beta'}\left(\alpha(\beta+\beta')\overrightarrow{OA} - \beta(\alpha+\alpha')\overrightarrow{OB}\right) = \frac{1}{\alpha\beta'-\alpha\beta'}\left(-\alpha'(\beta+\beta')\overrightarrow{OA'} + \beta'(\alpha+\alpha')\overrightarrow{OB'}\right)$$

Appellons G le barycentre de $\{(A, \alpha(\beta+\beta')), (B, -\beta(\alpha+\alpha'))\}$; alors, pour tout point $O \in \mathcal{P}$:

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{\alpha\beta'-\alpha\beta'}\left(\alpha(\beta+\beta')\overrightarrow{OA} - \beta(\alpha+\alpha')\overrightarrow{OB}\right)$$

Et $G \in (AB)$
Appellons G_1 le barycentre de $\{(A', -\alpha'(\beta+\beta')), (B', \beta'(\alpha+\alpha'))\}$; alors, pour tout point $O \in \mathcal{P}$:

$$\overrightarrow{OG_1} = \frac{1}{\alpha\beta'-\alpha\beta'}\left(-\alpha'(\beta+\beta')\overrightarrow{OA} + \beta'(\alpha+\alpha')\overrightarrow{OB}\right)$$

Et $G_1 \in (A'B')$
Nous avons donc $\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OG_1}$, c'est à dire $G = G_1$ et $G \in (AB) \cap (A'B')$; donc $G = L$

▷ Les coordonnées affines de L dans le repère (A, B) sont donc $(\alpha(\beta+\beta'), -\beta(\alpha+\alpha'))$
▷ Les coordonnées affines de L dans le repère (A', B') sont donc $(-\alpha'(\beta+\beta'), \beta'(\alpha+\alpha'))$

16.7.3 Espaces affines euclidiens

Exercice 19 :

Nous nous situons dans le plan affine euclidien $\mathcal{P}$ dans lequel nous avons mis un repère orthonormé $\mathcal{R}(O, i, j)$

1. *Soit $A \in \mathcal{P}$ un point de coordonnées $A(1, 1)$ et $u \in P$ de coordonnées $u\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$*
   Etudier l'ensemble $X = \left\{M \in \mathcal{P} \text{ tels que } \left\langle \overrightarrow{AM}/u\right\rangle = 0\right\}$

Il est possible de traduire autrement l'expression $\left\langle \overrightarrow{AM}/u \right\rangle = 0$; c'est l'ensemble des points $M \in \mathcal{P}$ tels que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et u sont orthogonaux. En prenant pour coordonnées $M\,(x, y)$, nous avons $\overrightarrow{AM} = \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix}$ et $\left\langle \overrightarrow{AM}/u \right\rangle = x - 1 + y - 1 = x + y - 2$

L'ensemble X est donc LA droite passant par A et orthogonale au vecteur u d'équation $x+y-2 = 0$

2. *Qu'en est-il de l'ensemble $X_k = \left\{ M \in \mathcal{P} \text{ tels que } \left\langle \overrightarrow{AM}/u \right\rangle = k \right\}$ où $k \in \mathbb{R}$*

   Cette fois ci, nous avons une droite d'équation $x + y - 2 = k \Longleftrightarrow x + y - (k + 2) = 0$
   C'est une droite parallèle à X et orthogonale à u

Exercice 21 :

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien et ABC un triangle (c'est à dire, trois points non alignés de $\mathcal{E}$). *Montrez que :*

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\left\langle \overrightarrow{AB}/\overrightarrow{AC} \right\rangle$$

Quel résultat retrouve-t-on lorsque le triangle est rectangle en A ?

Commençons par visualiser :

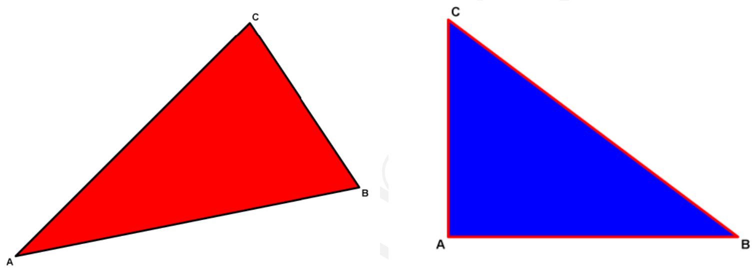

FIGURE 16.10 – Visualisation de l'exercice

Nous avons $BC^2 = \left\| \overrightarrow{BC} \right\|^2 = \left\langle \overrightarrow{BC}/\overrightarrow{BC} \right\rangle$

Or, d'après la relation de Chasles, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$ et donc $\left\| \overrightarrow{BC} \right\|^2 = \left\langle \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}/\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} \right\rangle$

La bilinéarité du produit scalaire montre que :

$$\left\| \overrightarrow{BC} \right\|^2 = \left\| \overrightarrow{AB} \right\|^2 + \left\| \overrightarrow{AC} \right\|^2 + 2\left\langle \overrightarrow{BA}/\overrightarrow{AC} \right\rangle$$

Ce qui est équivalent à $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\left\langle \overrightarrow{AB}/\overrightarrow{AC} \right\rangle$

Evidemment, si le triangle est rectangle en A, alors $\left\langle \overrightarrow{AB}/\overrightarrow{AC} \right\rangle = 0$ et nous retrouvons le théorème de Pythagorre : $BC^2 = AB^2 + AC^2$

Exercice 22 :

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien et $ABCD$ un parallélogramme de $\mathcal{E}$. Montrez la formule :

$$AC^2 - BD^2 = 4\left\langle \overrightarrow{AB}/\overrightarrow{BC} \right\rangle$$

Faisons la figure pour visualiser (figure 16.11) :

Nous recommençons l'exercice précédent :

- Nous avons $AC^2 = \left\| \overrightarrow{AC} \right\|^2 = \left\langle \overrightarrow{AC}/\overrightarrow{AC} \right\rangle$

  Or, d'après la relation de Chasles, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ et donc $\left\| \overrightarrow{AC} \right\|^2 = \left\langle \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}/\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} \right\rangle$

FIGURE 16.11 – Visualisation de l'exercice

La bilinéarité du produit scalaire montre que :

$$\left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2 = \left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 + \left\|\overrightarrow{BC}\right\|^2 + 2\left\langle\overrightarrow{AB}/\overrightarrow{BC}\right\rangle$$

Ce qui est équivalent à $AC^2 = AB^2 + BC^2 + 2\left\langle\overrightarrow{AB}/\overrightarrow{BC}\right\rangle$

▷ De même, nous avons $BD^2 = \left\|\overrightarrow{BD}\right\|^2 = \left\langle\overrightarrow{BD}/\overrightarrow{BD}\right\rangle$

Or, d'après la relation de Chasles, $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}$ et donc $\left\|\overrightarrow{BD}\right\|^2 = \left\langle\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}/\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}\right\rangle$
La bilinéarité du produit scalaire montre que :

$$\left\|\overrightarrow{BD}\right\|^2 = \left\|\overrightarrow{BA}\right\|^2 + \left\|\overrightarrow{AD}\right\|^2 + 2\left\langle\overrightarrow{BA}/\overrightarrow{AD}\right\rangle$$

Ce qui est équivalent à $BD^2 = BA^2 + AD^2 + 2\left\langle\overrightarrow{BA}/\overrightarrow{AD}\right\rangle$

▷ Et maintenant, on soustrait ! !

$$AC^2 - BD^2 = AB^2 + BC^2 + 2\left\langle\overrightarrow{AB}/\overrightarrow{BC}\right\rangle - \left(BA^2 + AD^2 + 2\left\langle\overrightarrow{BA}/\overrightarrow{AD}\right\rangle\right)$$

Or, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$ et donc $BC^2 = AD^2$; d'où :

$$AC^2 - BD^2 = 2\left\langle\overrightarrow{AB}/\overrightarrow{BC}\right\rangle - 2\left\langle\overrightarrow{BA}/\overrightarrow{AD}\right\rangle = 2\left\langle\overrightarrow{AB}/\overrightarrow{BC}\right\rangle + 2\left\langle\overrightarrow{AB}/\overrightarrow{AD}\right\rangle = 4\left\langle\overrightarrow{AB}/\overrightarrow{AD}\right\rangle$$

Ce que nous voulions

Et voilà le travail !

Exercice 23 :

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien de dimension 3 muni d'un repère othonormé $\mathcal{R}(O, i, j, k)$ La droite D est définie par les 2 plans P et P_1 :

$$\begin{cases} P: & 2x - 3y - 2z + 4 = 0 \\ P_1: & x + 2y - 2z - 5 = 0 \end{cases}$$

Montrer que les plans P et P_1 sont perpendiculaires

Pour montrer que ces deux plans sont perpendiculaires, nous allons travailler essentiellement dans les espaces directeurs.

1. Nous allons chercher un plan perpendiculaire à D que nous appellerons Π
2. Nous allons chercher un vecteur directeur de la droite vectorielle D_1 définie par l'intersection de Π et de P et nous allons montrer que D et D_1 ont des directions orthogonales
3. Puis, nous itérons le travail en allant chercher un vecteur directeur de la droite vectorielle D_2 définie par l'intersection de Π et de P_1 et nous allons montrer que D et D_2 ont des directions orthogonales

1. Recherche de l'équation cartésienne du plan Π
La direction *(le sous espace vectoriel directeur)* de D est donnée par :

$$\begin{cases} 2x - 3y - 2z = 0 \\ x + 2y - 2z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x - 3y = 2z \\ x + 2y = 2z \end{cases}$$

Les coordonnées des vecteurs de la direction de D sont $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} \frac{10}{7}z \\ \frac{2}{7}z \\ z \end{pmatrix}$. Nous en déduisons une base : $\overrightarrow{u_D} = \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$

Le plan vectoriel Π orthogonal à la direction de D admet donc le vecteur $\overrightarrow{u_D}$ comme vecteur normal. Ce plan Π a donc pour équation :

$$10x + 2y + 7z = 0$$

2. Soit D_1 la droite définie par :

$$\begin{cases} 10x + 2y + 7z = 0 \\ x + 2y - 2z = 0 \end{cases}$$

▷ Nous allons rechercher une base de D_1 en résolvant le système d'inconnues x et y :

$$\begin{cases} 10x + 2y + 7z = 0 \\ x + 2y - 2z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 10x + 2y = -7z \\ x + 2y = 2z \end{cases}$$

Les coordonnées des vecteurs de la direction de D_1 sont $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} -z \\ \frac{3}{2}z \\ z \end{pmatrix}$. Nous en déduisons une base : $\overrightarrow{u_{D_1}} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

▷ Il faut, maintenant montrer que $\overrightarrow{u_{D_1}}$ et $\overrightarrow{u_D}$ sont orthogonaux ;

$$\langle \overrightarrow{u_{D_1}} / \overrightarrow{u_D} \rangle = 10 \times (-2) + 2 \times 3 + 7 \times 2 = 0$$

Nous avons bien $\overrightarrow{u_{D_1}} \perp \overrightarrow{u_D}$

3. Soit D_2 la droite définie par :

$$\begin{cases} 10x + 2y + 7z = 0 \\ 2x - 3y - 2z = 0 \end{cases}$$

▷ Nous allons rechercher une base de D_2 en résolvant le système d'inconnues x et y :

$$\begin{cases} 10x + 2y + 7z = 0 \\ 2x - 3y - 2z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 10x + 2y = -7z \\ 2x - 3y = 2z \end{cases}$$

Les coordonnées des vecteurs de la direction de D_1 sont $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{2}z \\ -z \\ z \end{pmatrix}$. Nous en déduisons une base : $\overrightarrow{u_{D_2}} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

▷ Il faut, maintenant montrer que $\overrightarrow{u_{D_2}}$ et $\overrightarrow{u_D}$ sont orthogonaux ;

$$\langle \overrightarrow{u_{D_2}} / \overrightarrow{u_D} \rangle = 10 \times (-1) + 2 \times (-2) + 7 \times 2 = 0$$

Nous avons bien $\overrightarrow{u_{D_1}} \perp \overrightarrow{u_D}$

▷ Il faut aussi montrer que $\overrightarrow{u_{D_2}}$ et $\overrightarrow{u_{D_1}}$ sont orthogonaux ;

$$\langle \overrightarrow{u_{D_2}} / \overrightarrow{u_{D_1}} \rangle = (-1)\times(-2) + 3\times(-2) + 2\times 2 = 0$$

Nous avons bien $\overrightarrow{u_{D_1}} \perp \overrightarrow{u_{D_2}}$

Les 2 plans P et P_1 sont bien orthogonaux

Exercice 24 :

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien de dimension 3 muni d'un repère othonormé $\mathcal{R}(O,i,j,k)$. On considère les deux droites D et D_1 :

$$D : \begin{cases} x-y=1 \\ 2y+z=3 \end{cases} \qquad D_1 : \begin{cases} x+y+z=0 \\ 3x-y=2 \end{cases}$$

1. (a) *Donner un vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ de D*

   Voilà une question qui ne doit pas nous perdre : elle est très voisine de celles de l'exercice précédent !
   Nous allons rechercher une base $\overrightarrow{u}$ de D en résolvant le système d'inconnues x et y :

   $$\begin{cases} x-y=0 \\ 2y+z=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x-y=0 \\ 2y=-z \end{cases}$$

   Les coordonnées des vecteurs de la direction de D sont $\begin{pmatrix} \frac{-1}{2}z \\ \frac{-1}{2}z \\ z \end{pmatrix}$. Nous en déduisons une base ou vecteur directeur de D $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

   (b) *Donner un vecteur directeur $\overrightarrow{v}$ de D_1*

   Et on procède de manière identique : pour rechercher une base $\overrightarrow{v}$ de D_1 nous résolvons le système d'inconnues x et y :

   $$\begin{cases} x+y+z=0 \\ 3x-y=2 \end{cases} \iff \begin{cases} x+y=-z \\ 3x-y=0 \end{cases}$$

   Les coordonnées des vecteurs de la direction de D sont $\begin{pmatrix} \frac{-1}{4}z \\ \frac{-3}{4}z \\ z \end{pmatrix}$. Nous en déduisons une base ou vecteur directeur de D_1 $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$

2. *En déduire un vecteur $\overrightarrow{w}$ de leur perpendiculaire commune Δ*

   Nous devons avoir $\langle \overrightarrow{u} / \overrightarrow{w} \rangle = \langle \overrightarrow{v} / \overrightarrow{w} \rangle = 0$. En posant $\overrightarrow{w} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, nous avons :

   $$\langle \overrightarrow{u} / \overrightarrow{w} \rangle = -x-y+2z = 0 \text{ et } \langle \overrightarrow{v} / \overrightarrow{w} \rangle = x+3y-4z = 0$$

   Nous devons donc résoudre le système :

   $$\begin{cases} -x-y+2z = & 0 \\ x+3y-4z = & 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x+y = & 2z \\ x+3y = & 4z \end{cases}$$

Les coordonnées des vecteurs de la direction de Δ sont $\begin{pmatrix} z \\ z \\ z \end{pmatrix}$. Nous en déduisons une base ou vecteur directeur de Δ, $\overrightarrow{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Exercice 25 :

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien de dimension 3. Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur de E de norme 1 et $A \in \mathcal{E}$. On définit un plan H par :

$$H = \left\{M \in \mathcal{E} \text{ tels que } \left\langle \overrightarrow{AM} / \overrightarrow{u} \right\rangle = 0\right\}$$

Nous définissons un repère orthonormé $\mathcal{R}(A, i, j, \overrightarrow{u})$

H est donc le plan passant par A et orthogonal à $\overrightarrow{u}$; tout point du plan a pour coordonnées dans le repère $\mathcal{R}(A, i, j, \overrightarrow{u})$ $M(x, y, z)$, signifiant que $\overrightarrow{AM} = xi + yj + z\overrightarrow{u}$, et, donc, dans la base $\{i, j, \overrightarrow{u}\}$, $\overrightarrow{u}$ a pour coordonnées $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

1. *Montrer que $M \in H$ si et seulement si M a pour coordonnées $M(x, y, 0)$ avec $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$*

   Soit $M(x, y, z) \in H$. Alors : $M \in H \iff \left\langle \overrightarrow{AM} / \overrightarrow{u} \right\rangle = 0 \iff z = 0$
   Donc $M \in H$ si et seulement si M a pour coordonnées $M(x, y, 0)$ avec $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$

2. *Calculer, pour tout $N \in \mathcal{E}$, le produit scalaire $\left\langle \overrightarrow{AN} / \overrightarrow{u} \right\rangle$*

   En posant $N(x, y, z)$, alors $\left\langle \overrightarrow{AN} / \overrightarrow{u} \right\rangle = z$

3. *En déduire que l'application f définie par :*

$$\begin{cases} f : \mathcal{E} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \quad N & \longmapsto & f(N) = \left\langle \overrightarrow{AN} / \overrightarrow{u} \right\rangle \end{cases}$$

   permet de définir 2 demi-espaces dont H est la frontière.

   Clairement, ces 2 demi-espaces dont H est la frontière sont $H_1 = \{N(x, y, z) \in \mathcal{E} \text{ avec } z > 0\}$ et $H_2 = \{N(x, y, z) \in \mathcal{E} \text{ avec } z > 0\}$

   Il nous est même possible d'aller plus loin :H_1 *(comme H_2)* est un ensemble convexe.
   Qu'est ce que cela veut-il dire ?
   Cela veut dire que pour tout $M \in H_1$ et tout $N \in H_1$, l'intervalle $[M; N] \in H_1$.
   C'est quoi cet intervalle $[M; N]$? C'est l'ensemble des barycentres du système pondéré $\{(M, \lambda), (N, 1 - \lambda)\}$ avec $\lambda \in [0; 1]$.
   Autrement dit, pour tout $X \in [M; N]$, et tout $Z \in \mathcal{E}$, $\overrightarrow{ZX} = \lambda \overrightarrow{ZM} + (1 - \lambda) \overrightarrow{ZN}$, en particulier si $Z = A$, où nous avons :

$$\overrightarrow{AX} = \lambda \overrightarrow{AM} + (1 - \lambda) \overrightarrow{AB}$$

   A supposer que $M(x_M, y_M, z_M)$ et $N(x_N, y_N, z_N)$ avec $z_M > 0$ et $z_N > 0$, les coordonnées de X sont $X(\lambda x_M + (1 - \lambda) x_N, \lambda y_M + (1 - \lambda) y_N, \lambda z_M + (1 - \lambda) z_N)$.
   Il est facile de vérifier que $\lambda z_M + (1 - \lambda) z_N > 0$ et donc $X \in H_1$

Exercice 26 :

1. *Soit $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien de dimension quelconque.*

   (a) *Etant donnés 3 points A, B et M de $\mathcal{E}$, montrer que l'une quelconque des égalités suivantes entraîne l'alignement des 3 points A, B et M de $\mathcal{E}$*

- ⋆ $AB = AM + MB$

  Dans ce cas, efectivement $AB = AM + MB$ si et seulement si A, M et B sont alignés ($M \in [A, B]$
- ⋆ $AB = AM - MB$

  Nous avons $AB = AM - MB \iff AB + BM = AM$ et $AB + BM = AM$ si et seulement si A, M et B sont alignés ($B \in [A, M]$
- ⋆ $AB = MB - AM$

  Nous avons $AB = MB - AM \iff AB + AM = BM$ et $AB + AM = BM$ si et seulement si A, M et B sont alignés ($A \in [B, M]$

(b) *Montrer l'inégalité suivante, vraie pour 3 points quelconques A, M et B*

$$|MA - MB| \leqslant AB$$

Montrer que $|MA - MB| \leqslant AB$ c'est montrer que $MA - MB \leqslant AB$ et $-(MA - MB) \leqslant AB$

- ⋆ Montrer que $MA - MB \leqslant AB$, c'est montrer que $MA \leqslant AB + MB$; c'est l'inégalité triangulaire classique
- ⋆ Montrer que $MB - MA \leqslant AB$, c'est montrer que $MB \leqslant AB + MA$; c'est l'inégalité triangulaire classique

2. *Nous nous situons maintenant, dans le plan affine euclidien $\mathcal{P}$*
   A et B sont 2 points distincts du plan $\mathcal{P}$ et $k \in \mathbb{R}^{*+}$. On appelle $\mathcal{C}_k$, l'ensemble des points $M \in \mathcal{P}$ tels que $\dfrac{MA}{MB} = k$. Etudier $\mathcal{C}_k$ en fonction des valeurs de k

(a) Si $k = 1$

Nous devons donc chercher $M \in \mathcal{P}$ tels que $\dfrac{MA}{MB} = 1 \iff MA = MB$

L'ensemble des points M est donc la médiatrice du segment $[A, B]$

(b) Si $k \neq 1$

Alors $\dfrac{MA}{MB} = k \iff \dfrac{MA^2}{MB^2} = k^2 \iff MA^2 - k^2MB^2 = 0$

- ▷ On considère le système pondéré $\{(A, 1) ; (B, k)\}$.
  Le barycentre de ce système existe, puisque $k + 1 \neq 0$ *(nous avons $k > 0$)*. Soit G_1 le barycentre ; alors $G_1 \in (AB)$ et pour tout $M \in \mathcal{P}$, nous avons :

$$(1 + k)\,\overrightarrow{MG_1} = \overrightarrow{MA} + k\overrightarrow{MB}$$

- ▷ On considère le système pondéré $\{(A, 1) ; (B, -k)\}$.
  Le barycentre de ce système existe, puisque $k - 1 \neq 0$ *(nous avons $k \neq 1$)*. Soit G_2 le barycentre ; alors $G_2 \in (AB)$ et pour tout $M \in \mathcal{P}$, nous avons :

$$(1 - k)\,\overrightarrow{MG_2} = \overrightarrow{MA} - k\overrightarrow{MB}$$

En utilisant le produit scalaire, nous avons :

$$(1 - k^2)\left\langle \overrightarrow{MG_1} / \overrightarrow{MG_1} \right\rangle = \left\langle \overrightarrow{MA} + k\overrightarrow{MB} / \overrightarrow{MA} - k\overrightarrow{MB} \right\rangle = MA^2 - k^2MB^2 = 0$$

C'est à dire, comme $k \neq 1$, $\left\langle \overrightarrow{MG_1} / \overrightarrow{MG_1} \right\rangle = 0$ *(Cf figure 16.12)*

16.7.4 Fonction scalaire de Leibniz

Exercice 27 :

Quel est, dans $\mathbb{C}$, ensemble des nombres complexes, les nombres vérifiant :

$$2\,|z - i|^2 - 3\,|z - (1 - i)|^2 + 4\,|z - 1|^2 = 5$$

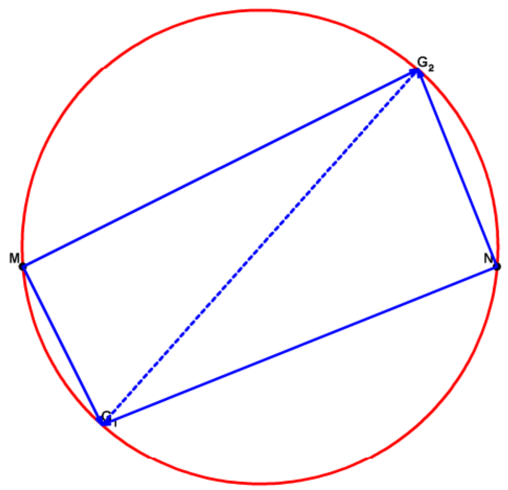

FIGURE 16.12 – Visualisation des points $M \in \mathcal{P}$ tels que $\dfrac{MA}{MB} = k$

On identifie l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ au plan affine $\mathcal{P}$ rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.
Soient $A \in \mathcal{P}$ le point d'affixe i, $B \in \mathcal{P}$ le point d'affixe $1-i$ et $C \in \mathcal{P}$ le point d'affixe 1 ; soit $M \in \mathcal{P}$ le point d'affixe z. Alors, l'égalité

$$2|z-i|^2 - 3|z-(1-i)|^2 + 4|z-1|^2 = 5$$

peut donc s'écrire : $2AM^2 - 3MB^2 + 4MC^2 = 5$.

- Considérons le système pondéré $\{(A,2);(B,-3);(C,4)\}$. Comme la somme des coefficients est non nulle, ce système pondéré admet un barycentre G qui vérifie, pour tout point $M \in \mathcal{P}$:

$$3\overrightarrow{MG} = 2\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} + 4\overrightarrow{MC}$$

C'est à dire, en prenant l'origine 0 du repère $\mathcal{R}(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, $3\overrightarrow{OG} = 2\overrightarrow{OA} - 3\overrightarrow{OB} + 4\overrightarrow{OC}$, et, en posant z_G l'affixe de G :

$$3z_G = 2z_A - 3z_B + 4z_C \iff 3z_G = 1 + 5i \iff z_G = \frac{1}{3} + \frac{5i}{3}$$

- Nous avons :

$$AM^2 = \left\langle \overrightarrow{MA} / \overrightarrow{MA} \right\rangle = \left\langle \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA} / \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA} \right\rangle = MG^2 + GA^2 + 2\left\langle \overrightarrow{MG} / \overrightarrow{GA} \right\rangle$$

De même :

$$BM^2 = MG^2 + GB^2 + 2\left\langle \overrightarrow{MG} / \overrightarrow{GB} \right\rangle \text{ et } CM^2 = MG^2 + GC^2 + 2\left\langle \overrightarrow{MG} / \overrightarrow{GC} \right\rangle$$

Et donc :

$$\begin{aligned} 2AM^2 - 3MB^2 + 4MC^2 = \; & 3MG^2 + 2GA^2 - 3GB^2 + 4GC^2 + \\ & 2\left(2\left\langle \overrightarrow{MG} / \overrightarrow{GA} \right\rangle - 3\left\langle \overrightarrow{MG} / \overrightarrow{GB} \right\rangle + 4\left\langle \overrightarrow{MG} / \overrightarrow{GC} \right\rangle\right) \\ = \; & 3MG^2 + 2GA^2 - 3GB^2 + 4GC^2 + 2\left\langle \overrightarrow{MG} / 2\overrightarrow{GA} - 3\overrightarrow{GB} + 4\overrightarrow{GC} \right\rangle \end{aligned}$$

Or, $2\overrightarrow{GA} - 3\overrightarrow{GB} + 4\overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$ et donc :

$$2AM^2 - 3MB^2 + 4MC^2 = 3MG^2 + 2GA^2 - 3GB^2 + 4GC^2$$

Et donc :

$$2AM^2 - 3MB^2 + 4MC^2 = 5 \Longleftrightarrow 3MG^2 + 2GA^2 - 3GB^2 + 4GC^2 = 5$$

Et donc, $MG^2 = \dfrac{1}{3}\left(5 - \left(2GA^2 - 3GB^2 + 4GC^2\right)\right)$

- Or, $2GA^2 - 3GB^2 + 4GC^2 = 2\left|z_A - z_G\right|^2 - 3\left|z_B - z_G\right|^2 + 4\left|z_C - z_G\right|^2 = \dfrac{-26}{3}$ et donc $MG^2 = \dfrac{1}{3}\left(5 + \dfrac{26}{3}\right) = \dfrac{41}{9}$

  Donc, les points $M \in \mathcal{P}$ tels que $MG^2 = \dfrac{41}{9} \Longleftrightarrow MG = \dfrac{\sqrt{41}}{3}$ est un cercle de centre G et de rayon $\dfrac{\sqrt{41}}{3}$.

  En termes de nombres complexes, nous avons $|z - z_G| = \dfrac{\sqrt{41}}{3} \Longleftrightarrow \left|z - \left(\dfrac{1}{3} + \dfrac{5i}{3}\right)\right| = \dfrac{\sqrt{41}}{3}$

Exercice 28 :

On considère un espace affine quelconque $\mathcal{E}$, A et B, 2 points de $\mathcal{E}$. Quel est l'ensemble des points $M \in \mathcal{E}$ tels que $\left\langle \overrightarrow{MA} / \overrightarrow{MB} \right\rangle = 0$

On appelle I le milieu du segment $[A; B]$, ce qui se dit encore, I est l'isobarycentre de A et B

Nous avons donc $\overrightarrow{IA} = -\overrightarrow{IB} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{BA}$

Donc :

$$\begin{aligned}\left\langle \overrightarrow{MA} / \overrightarrow{MB} \right\rangle &= \left\langle \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA} / \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB} \right\rangle \\ &= \left\langle \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA} / \overrightarrow{MI} - \overrightarrow{IA} \right\rangle \\ &= MI^2 - IA^2\end{aligned}$$

Donc $\left\langle \overrightarrow{MA} / \overrightarrow{MB} \right\rangle = 0 \Longleftrightarrow MI^2 - IA^2 = 0 \Longleftrightarrow MI = IA$. ce qui signifie que l'ensemble des points $M \in \mathcal{E}$ tels que $\left\langle \overrightarrow{MA} / \overrightarrow{MB} \right\rangle = 0$ est le cercle de centre I et de rayon IA *(cf figure 16.13)*

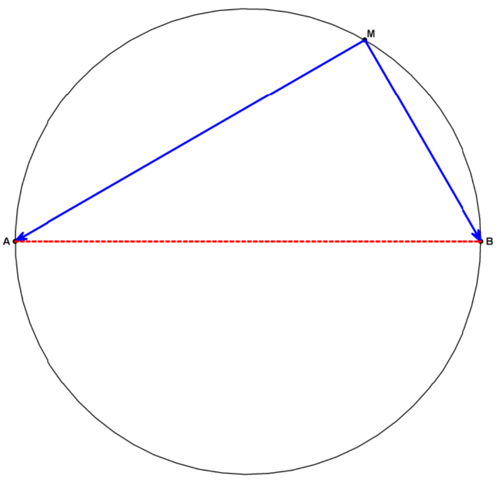

FIGURE 16.13 – Visualisation du cercle de diamètre $[A; B]$

On vient de montrer que :

1. **Dans un plan affine euclidien $\mathcal{P}$ les points situés sur un cercle de diamètre $[A; B]$ sont tels que $\left\langle \overrightarrow{MA} / \overrightarrow{MB} \right\rangle = 0$. Nous obtenons donc un triangle rectangle AMB rectangle en A**

2. **Dans un espace affine euclidien $\mathcal{E}$ de dimension 3 les points situés sur la sphère de diamètre $[A;B]$ sont tels que $\left\langle \overrightarrow{MA}/\overrightarrow{MB} \right\rangle = 0$.**
3. **Nous avons le même résultat dans un espace affine euclidien $\mathcal{E}$ de dimension supérieure à 3**

Exercice 29 :

Nous nous situons dans le plan $\mathcal{P}$, espace affine de dimension 2 Considérons un carré $ABCD$.

1. *Démontrer que l'ensemble des points $M \in \mathcal{P}$ tels que :*

$$\left\langle \left(\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}\right) / \left(\overrightarrow{MC} + 3\overrightarrow{MD}\right) \right\rangle = 0$$

est un cercle.

- Considérons le système pondéré $\{(A,1);(B,3)\}$. Comme la somme des coefficients est non nulle, ce système pondéré admet un barycentre G_1 qui vérifie, pour tout point $M \in \mathcal{P}$:

$$4\overrightarrow{MG_1} = \overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}$$

- Considérons le système pondéré $\{(C,1);(D,3)\}$. Comme la somme des coefficients est non nulle, ce système pondéré admet un barycentre G_2 qui vérifie, pour tout point $M \in \mathcal{P}$:

$$4\overrightarrow{MG_2} = \overrightarrow{MC} + 3\overrightarrow{MD}$$

- La relation $\left\langle \left(\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}\right) / \left(\overrightarrow{MC} + 3\overrightarrow{MD}\right) \right\rangle = 0$ devient alors

$$\left\langle 4\overrightarrow{MG_1}/4\overrightarrow{MG_2} \right\rangle = 0 \iff 16\left\langle \overrightarrow{MG_1}/\overrightarrow{MG_2} \right\rangle = 0 \iff \left\langle \overrightarrow{MG_1}/\overrightarrow{MG_2} \right\rangle = 0$$

L'ensemble des points $M \in \mathcal{P}$ tels que : $\left\langle \left(\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}\right) / \left(\overrightarrow{MC} + 3\overrightarrow{MD}\right) \right\rangle = 0$ est donc un cercle de diamètre $[G_1;G_2]$ *(cf figure 16.14)*

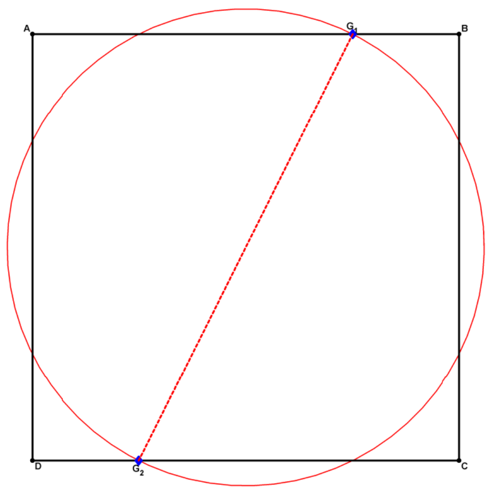

FIGURE 16.14 – Visualisation du cercle de diamètre $[G1;G2]$

2. *Trouver l'ensemble des points $M \in \mathcal{P}$ tels que :*

$$\left\langle \left(\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}\right) / \left(\overrightarrow{MC} + 3\overrightarrow{MD}\right) \right\rangle = k$$

Où k est un réel donné. Discuter suivant les valeurs de $k \in \mathbb{R}$

Comme tout à l'heure, nous avons $\left\langle\left(\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}\right)/\left(\overrightarrow{MC}+3\overrightarrow{MD}\right)\right\rangle = k \Longleftrightarrow 16\left\langle\overrightarrow{MG_1}/\overrightarrow{MG_2}\right\rangle = k$

Soit I le milieu du segment $[G_1;G_2]$. Alors :

$$\left\langle\overrightarrow{MG_1}/\overrightarrow{MG_2}\right\rangle = MI^2 - IG_1^2 = k \Longleftrightarrow MI^2 = IG_1^2 + k$$

Ainsi :
- ▹ Si $IG_1^2 + k < 0$ c'est à dire si $k < -IG_1^2$, alors, les points M n'existent pas
- ▹ Si $IG_1^2 + k = 0$ c'est à dire si $k = -IG_1^2$, alors, $M = I$
- ▹ Si $IG_1^2 + k > 0$ c'est à dire si $k > -IG_1^2$, alors, les points M forment un cercle de centre I et de rayon $R = \sqrt{IG_1^2 + k}$

3. *Trouver l'ensemble des points $M \in \mathcal{P}$ tels que :*

$$\left\|\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}\right\| = \left\|\overrightarrow{MC}+3\overrightarrow{MD}\right\|$$

Nous avons, comme tout à l'heure :

$$\left\|\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}\right\| = \left\|\overrightarrow{MC}+3\overrightarrow{MD}\right\| \Longleftrightarrow \left\|4\overrightarrow{MG_1}\right\| = \left\|4\overrightarrow{MG_2}\right\| \Longleftrightarrow MG_1 = MG_2$$

L'ensemble des points $M \in \mathcal{P}$ tels que : $\left\|\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}\right\| = \left\|\overrightarrow{MC}+3\overrightarrow{MD}\right\|$ est donc la médiatrice du segment $[G_1;G_2]$

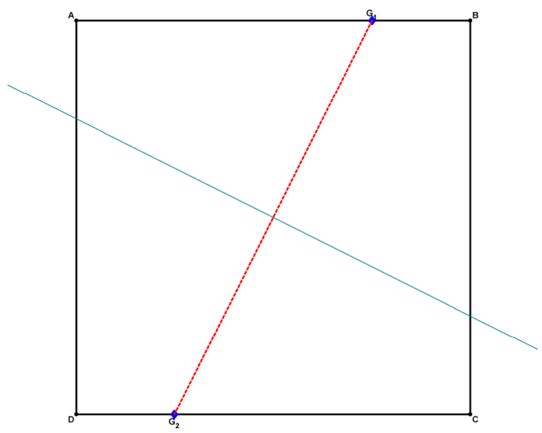

Figure 16.15 – Visualisation de la médiatrice du segment $[G1;G2]$

Exercice 30 :

Nous nous situons dans le plan $\mathcal{P}$, espace affine de dimension 2 Considérons un carré $ABCD$ de côté 5

1. *Trouver l'ensemble des points $M \in \mathcal{P}$ tels que on ait l'égalité :*

$$3MA^2 + 2MB^2 = 3MC^2 + 2MD^2$$

La résolution de cette question va se faire en plusieurs étapes
- ▹ Tout d'abord, nous créons 2 fonctions f et g de $\mathcal{P}$ dans $\mathbb{R}$

$$\left\{\begin{array}{ccc} f:\mathcal{P} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ M & \longmapsto & f(M) = 3MA^2 + 2MB^2 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{ccc} g:\mathcal{P} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ M & \longmapsto & g(M) = 3MC^2 + 2MD^2 \end{array}\right.$$

f et g sont donc 2 fonctions scalaires de Leibniz.
La question posée est donc la recherche des points $M \in \mathcal{P}$ tels que on ait l'égalité : $f(M) = g(M)$

- ▷ Soit G_1 le barycentre du système pondéré $\{(A,3)\,;(B,2)\}$; alors, pour tout $M \in \mathcal{P}$, nous avons :

$$5\overrightarrow{MG_1} = 3\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}$$

En particulier si $M = A$ ou $M = B$, nous avons $\overrightarrow{AG_1} = \dfrac{2}{5}\overrightarrow{AB}$ ou $\overrightarrow{BG_1} = \dfrac{3}{5}\overrightarrow{BA}$, ce qui nous donne $AG_1 = \dfrac{2}{5}AB = 2$ ou $BG_1 = \dfrac{3}{5}AB = 3$.
Nous avons ainsi $f(G_1) = 3G_1A^2 + 2G_1B^2 = 12 + 18 = 30$

- ▷ Soit G_2 le barycentre du système pondéré $\{(C,3)\,;(D,2)\}$; alors, pour tout $M \in \mathcal{P}$, nous avons :

$$5\overrightarrow{MG_2} = 3\overrightarrow{MC} + 2\overrightarrow{MD}$$

En particulier si $M = C$ ou $M = D$, nous avons $\overrightarrow{CG_2} = \dfrac{2}{5}\overrightarrow{CD}$ ou $\overrightarrow{DG_2} = \dfrac{3}{5}\overrightarrow{DC}$, ce qui nous donne $CG_2 = \dfrac{2}{5}CD = 2$ ou $DG_2 = \dfrac{3}{5}DC = 3$.
Nous avons ainsi $g(G_2) = 3G_2C^2 + 2G_2D^2 = 12 + 18 = 30$

- ▷ D'après l'étude que nous avons faite des fonctions scalaires de Leibniz, nous avons :

$$f(M) = f(G_1) + 5MG_1^2 \text{ et } g(M) = g(G_2) + 5MG_2^2$$

En remarquant que $f(G_1) = g(G_2)$, nous avons :

$$f(M) = g(M) \iff 5MG_1^2 = 5MG_2^2 \iff MG_1 = MG_2$$

L'ensemble des points $M \in \mathcal{P}$ tels que on ait l'égalité : $f(M) = g(M)$ est donc la médiatrice du segment $[G_1; G_2]$

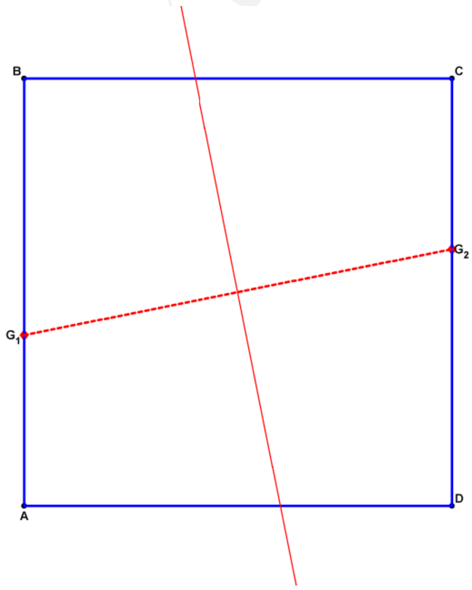

FIGURE 16.16 – Visualisation de la médiatrice du segment $[G1; G2]$

2. *Trouver l'ensemble des points $M \in \mathcal{P}$ qui vérifient l'égalité :*

$$3MA^2 + 2MB^2 = 3MC^2 + 2MD^2 = 135$$

Nous devons donc trouver l'ensemble des points $M \in \mathcal{P}$ qui vérifient l'égalité : $f(M) = g(M) = 135$

▷ Reprenons l'expression de $f(M)$:

$$f(M) = f(G_1) + 5MG_1^2 = 30 + 5MG_1^2 = 135 \iff MG_1^2 = 21 \iff MG_1 = \sqrt{21}$$

L'ensemble des points $M \in \mathcal{P}$ qui vérifient l'égalité : $f(M) = 135$ est donc un cercle de centre G_1 et de rayon $\sqrt{21}$

▷ De même :

$$g(M) = g(G_2) + 5MG_2^2 = 30 + 5MG_2^2 = 135 \iff MG_2^2 = 21 \iff MG_2 = \sqrt{21}$$

L'ensemble des points $M \in \mathcal{P}$ qui vérifient l'égalité : $g(M) = 135$ est donc un cercle de centre G_2 et de rayon $\sqrt{21}$

▷ Les points $M \in \mathcal{P}$ qui vérifient l'égalité : $f(M) = g(M) = 135$ sont donc à l'intersection de ces deux cercles ; il y a donc 2 points solution.*(figure 16.17)*

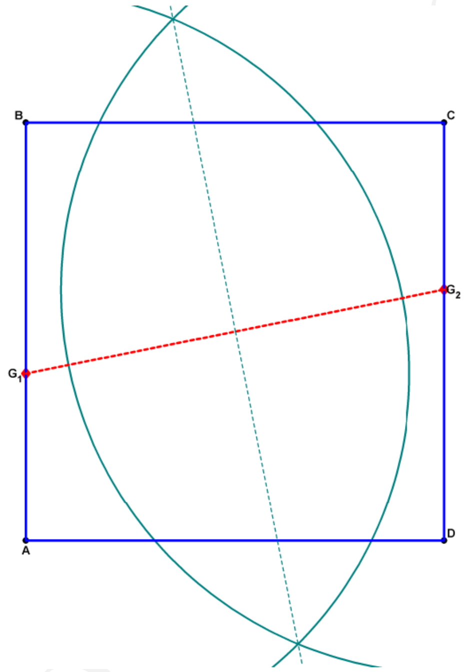

FIGURE 16.17 – Visualisation des 2 points d'intersection et de la médiatrice du segment $[G1; G2]$

3. *Trouver l'ensemble des points $M \in \mathcal{P}$ tels que*

$$3MA^2 + 2MB^2 = 3MC^2 + 2MD^2 = k$$

Où k est un réel donné. Discuter suivant les valeurs de $k \in \mathbb{R}$

La question est, ici, semblable : il faut donc trouver l'ensemble des points $M \in \mathcal{P}$ qui vérifient l'égalité : $f(M) = g(M) = k$

▷ Reprenons l'expression de $f(M)$:

$$f(M) = 30 + 5MG_1^2 = k \iff 5MG_1^2 = k - 30$$

⋆ Ainsi, si $k < 30$, les points M n'existent pas

⋆ Si $k = 30$, alors $M = G_1$

⋆ Si $k > 30$ alors, l'ensemble des points M tels que $f(M) = k$ est un cercle de centre G_1 et de rayon $\sqrt{\dfrac{k-30}{5}}$

▷ De même :

$$g(M) = k \iff 5MG_2^2 = k - 30$$

Et donc, comme précédemment :

- ⋆ Ainsi, si $k < 30$, les points M n'existent pas
- ⋆ Si $k = 30$, alors $M = G_2$
- ⋆ Si $k > 30$ alors, l'ensemble des points M tels que $g(M) = k$ est un cercle de centre G_2 et de rayon $\sqrt{\dfrac{k-30}{5}}$

En conclusion, si nous appelons $\mathcal{H}$ l'ensemble des points $M \in \mathcal{P}$ qui vérifient l'égalité : $f(M) = g(M) = k$

- Si $k < 30$ alors $\mathcal{H}$ est vide
- Si $k = 30$, alors $\mathcal{H} = \{G_1; G_2\}$
- Si $k > 30$, $\mathcal{H}$ est la réunion de 2 cercles : le premier, un cercle de centre G_1 et de rayon $\sqrt{\dfrac{k-30}{5}}$ et le second, un cercle de centre G_2 et de rayon $\sqrt{\dfrac{k-30}{5}}$

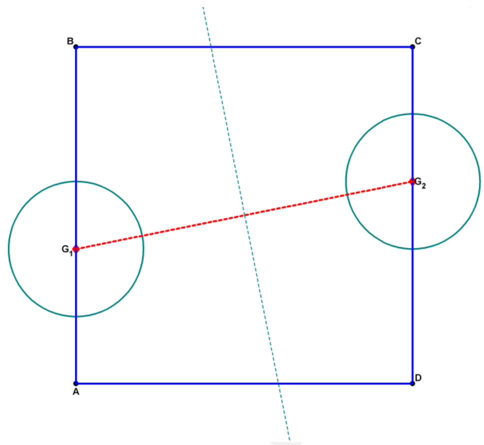

FIGURE 16.18 – Visualisation de l'ensemble $\mathcal{H}$ lorsque $k = 35$

Exercice 31 :

Nous nous situons dans le plan $\mathcal{P}$, espace affine de dimension 2 Considérons un triangle ABC.
Quel est le point $M \in \mathcal{P}$ pour lequel la somme $MA^2 + MB^2 + MC^2$ soit minimale ?

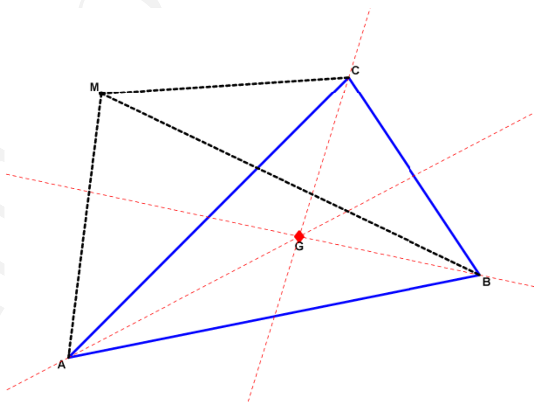

FIGURE 16.19 – Visualisation de l'exercice

Soit f l'application de $\mathcal{P}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(M) = MA^2 + MB^2 + MC^2$; c'est une fonction scalaire de Leibniz.
En posant G l'isobarycentre de A, B, C. Pour rappel, G est le point de rencontre des médianes du triangle ABC. f peut donc s'écrire différement :

$$f(M) = f(G) + 3MG^2$$

Pour tout $M \in \mathcal{P}$, nous avons $f(M) - f(G) = 3MG^2$, c'est à dire $f(M) - f(G) \geqslant 0$, et donc, pour tout $M \in \mathcal{P}$ $f(M) \geqslant f(G)$, le minimum étant atteint lorsque $M = G$
Donc, la somme $MA^2 + MB^2 + MC^2$ est minimale lorsque $M = G$

Exercice 32 :

Nous nous situons dans le plan $\mathcal{P}$, espace affine de dimension 2
Considérons un triangle ABC non équilatéral, et nous appelons G le centre de gravité.
On pose $a = BC$, $b = CA$ et $c = AB$

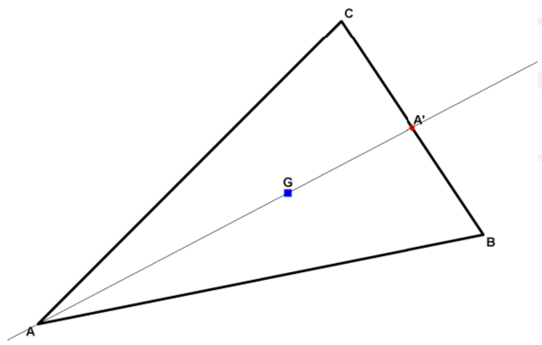

FIGURE 16.20 – Visualisation de l'exercice

1. *Démontrer que $GA^2 = \dfrac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{9}$*

   Soit A' le milieu du segment $[B, C]$ et donc G l'isobarycentre de A, B, et C. Alors :
   - ⋆ $b^2 = AC^2 = \left\langle \overrightarrow{AC} / \overrightarrow{AC} \right\rangle = \left\langle \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'C} / \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'C} \right\rangle = AA'^2 + A'C^2 + 2\left\langle \overrightarrow{AA'} / \overrightarrow{A'C} \right\rangle$
   - ⋆ De même,
   $$c^2 = AB^2 = \left\langle \overrightarrow{AB} / \overrightarrow{AB} \right\rangle = \left\langle \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'B} / \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'B} \right\rangle = AA'^2 + A'B^2 + 2\left\langle \overrightarrow{AA'} / \overrightarrow{A'B} \right\rangle$$
   - ⋆ De telle sorte que :
   $$b^2 + c^2 = AA'^2 + A'C^2 + 2\left\langle \overrightarrow{AA'} / \overrightarrow{A'C} \right\rangle + AA'^2 + A'B^2 + 2\left\langle \overrightarrow{AA'} / \overrightarrow{A'B} \right\rangle$$
   Or, comme $\overrightarrow{A'C} = -\overrightarrow{A'B}$, nous avons $2\left\langle \overrightarrow{AA'} / \overrightarrow{A'C} \right\rangle + 2\left\langle \overrightarrow{AA'} / \overrightarrow{A'B} \right\rangle = 0$ et donc :
   $$b^2 + c^2 = AA'^2 + A'C^2 + AA'^2 + A'B^2 = 2AA'^2 + 2A'B^2 = 2AA' + 2A'B^2 = 2AA'^2 + 2 \times \frac{a^2}{4}$$
   Comme $AG = \dfrac{2}{3}AA'$, nous avons $AA' = \dfrac{3}{2}AG$ et donc $AA'^2 = \dfrac{9}{4}AG^2$ D'où :
   $$b^2 + c^2 = 2AA'^2 + 2 \times \frac{a^2}{4} \iff 2 \times \frac{9}{4}AG^2 = b^2 + c^2 - \frac{a^2}{2} \iff AG^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{9}$$
   Ce que nous voulions

2. *En déduire la valeur de $\left(b^2 - c^2\right) GA^2 + \left(c^2 - a^2\right) GB^2 + \left(a^2 - b^2\right) GC^2$*

   Pa analogie avec la question précédente, nous avons :
   - $GB^2 = \dfrac{2a^2 + 2c^2 - b^2}{9}$
   - $GC^2 = \dfrac{2b^2 + 2a^2 - c^2}{9}$

Et il suffit, maintenant, de remplacer, pour trouver, facilement que

$$\left(b^2-c^2\right)GA^2+\left(c^2-a^2\right)GB^2+\left(a^2-b^2\right)GC^2=0$$

3. *Trouver l'ensemble des points $M\in\mathcal{P}$ tels que*

$$\left(b^2-c^2\right)MA^2+\left(c^2-a^2\right)MB^2+\left(a^2-b^2\right)MC^2=0$$

Si nous considérons le système pondéré $\left\{\left(A,b^2-c^2\right),\left(A,c^2-b^2\right),\left(C,a^2-b^2\right)\right\}$, la somme des coefficients est nulle et le vecteur $\left(b^2-c^2\right)\overrightarrow{MA}+\left(c^2-b^2\right)\overrightarrow{MB}+\left(a^2-b^2\right)\overrightarrow{MC}$ est constant. En effet :

$$\begin{aligned}\left(b^2-c^2\right)\overrightarrow{MA}+\left(c^2-b^2\right)\overrightarrow{MB}+\left(a^2-b^2\right)\overrightarrow{MC}= &\left(b^2-c^2\right)\overrightarrow{MA}+\left(c^2-b^2\right)\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}\right)\\ &+\left(a^2-b^2\right)\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC}\right)\\ = &\left(c^2-b^2\right)\overrightarrow{AB}+\left(a^2-b^2\right)\overrightarrow{AC}\end{aligned}$$

Posons $\overrightarrow{a}=\left(c^2-b^2\right)\overrightarrow{AB}+\left(a^2-b^2\right)\overrightarrow{AC}$.
Si nous considérons la fonction de Leibniz

$$\Phi(M)=\left(b^2-c^2\right)MA^2+\left(c^2-a^2\right)MB^2+\left(a^2-b^2\right)MC^2$$

nous avons, d'après 16.6.3, pour tout $M\in\mathcal{P}$ et tout $M'\in\mathcal{P}$:

$$\Phi(M)=\Phi(M')+2\left\langle\overrightarrow{MM'}/\overrightarrow{a}\right\rangle$$

En particulier pour $M'=G$, isobarycentre de A, B, C :

$$\Phi(M)=\Phi(G)+2\left\langle\overrightarrow{MG}/\overrightarrow{a}\right\rangle=2\left\langle\overrightarrow{MG}/\overrightarrow{a}\right\rangle$$

car $\Phi(G)=0$
Ainsi, l'ensemble des points $M\in\mathcal{P}$ tels que $\left(b^2-c^2\right)MA^2+\left(c^2-a^2\right)MB^2+\left(a^2-b^2\right)MC^2=0$ est l'ensemble des points $M\in\mathcal{P}$ tels que $\Phi(M)=0$, autrement dit, des points $M\in\mathcal{P}$ tels que $\left\langle\overrightarrow{MG}/\overrightarrow{a}\right\rangle=0$.
Cet ensemble est donc la droite de direction orthogonale à $\overrightarrow{a}=\left(c^2-b^2\right)\overrightarrow{AB}+\left(a^2-b^2\right)\overrightarrow{AC}$ et passant par G

Exercice 33 :

1. *Soit ABC un triangle rectangle en A et nous posons $BC=2a$. Etudier, suivant les valeurs du réel $k\in\mathbb{R}$, l'ensemble des points $M\in\mathcal{P}$ qui vérifient l'égalité :*

$$4MA^2-MB^2-MC^2=k$$

Préciser l'ensemble lors que $k=4a^2$

Nous avons $AB^2+AC^2=4a^2$ et $\left\langle\overrightarrow{AB}/\overrightarrow{AC}\right\rangle=0$
Soit Φ, la fonction scalaire de Leibniz définie par :

$$\Phi(M)=4MA^2-MB^2-MC^2$$

Soit G le barycentre du système pondéré $\{(A,4);(B,-1);(C,-1)\}$. Alors, pour tout $M\in\mathcal{P}$, nous avons :

$$2\overrightarrow{MG}=4\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}$$

Et donc, en particulier : $2\overrightarrow{AG}=-\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\iff\overrightarrow{AG}=\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CA}\right)$
D'après 16.6.3, pour tout $M\in\mathcal{P}$, nous avons $\Phi(M)=\Phi(G)+2MG^2$
Il faut donc calculer $\Phi(G)$
Nous avons : $\Phi(G)=4GA^2-GB^2-GC^2$

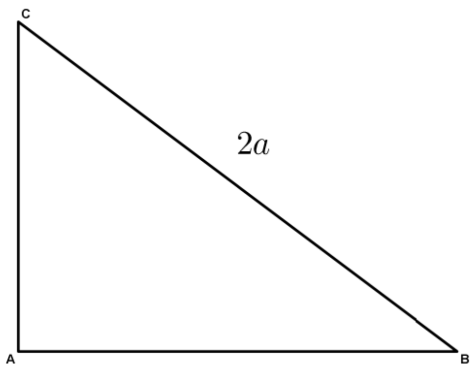

FIGURE 16.21 – Triangle rectangle en A d'hypothénuse de longueur $2a$

- Calcul de GA^2

$$\begin{aligned} GA^2 &= \left\langle \overrightarrow{GA} / \overrightarrow{GA} \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CA}\right) / \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CA}\right) \right\rangle \\ &= \frac{1}{4}\left(\left\langle \overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CA} / \overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CA} \right\rangle\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(AB^2+AC^2+2\left\langle \overrightarrow{BA} / \overrightarrow{CA} \right\rangle\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(AB^2+AC^2\right) \\ &= a^2 \end{aligned}$$

Donc $GA^2 = a^2$

- Calcul de GB^2

$$\begin{aligned} GB^2 &= \left\langle \overrightarrow{GB} / \overrightarrow{GB} \right\rangle \\ &= \left\langle \overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AB} / \overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AB} \right\rangle \\ &= GA^2+BA^2+2\left\langle \overrightarrow{GA} / \overrightarrow{AB} \right\rangle \end{aligned}$$

Nous avons :

$$\left\langle \overrightarrow{GA} / \overrightarrow{AB} \right\rangle = \left\langle \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CA}\right) / \overrightarrow{AB} \right\rangle = \frac{1}{2}\left(-AB^2+\left\langle \overrightarrow{CA} / \overrightarrow{AB} \right\rangle\right) = \frac{-AB^2}{2}$$

Et donc $GB^2 = a^2+BA^2+2\left\langle \overrightarrow{GA} / \overrightarrow{AB} \right\rangle = a^2+BA^2+2\times\dfrac{-AB^2}{2} = a^2$

- Calcul de GC^2

$$\begin{aligned} GC^2 &= \left\langle \overrightarrow{GC} / \overrightarrow{GC} \right\rangle \\ &= \left\langle \overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AC} / \overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AC} \right\rangle \\ &= GA^2+CA^2+2\left\langle \overrightarrow{GA} / \overrightarrow{AC} \right\rangle \end{aligned}$$

Nous avons :

$$\left\langle \overrightarrow{GA} / \overrightarrow{AC} \right\rangle = \left\langle \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CA}\right) / \overrightarrow{AC} \right\rangle = \frac{1}{2}\left(-AC^2+\left\langle \overrightarrow{BA} / \overrightarrow{CA} \right\rangle\right) = \frac{-AC^2}{2}$$

Et donc $GC^2 = a^2+CA^2+2\left\langle \overrightarrow{GA} / \overrightarrow{AC} \right\rangle = a^2+CA^2+2\times\dfrac{-AC^2}{2} = a^2$

D'où $\Phi(G) = 4GA^2-GB^2-GC^2 = 2a^2$

Ainsi, pour tout $M \in \mathcal{P}$, nous avons $\Phi(M) = \Phi(G) + 2MG^2 = 2a^2 + 2MG^2$. Ainsi :

$$\Phi(M) = k \iff 2a^2 + 2MG^2 = k \iff MG^2 = \frac{k - 2a^2}{2}$$

Donc :

- Si $k < 2a^2$, il n'existe aucun point tel que $\Phi(M) = k$
- Si $k = 2a^2$, alors $MG^2 = 0$ et l'ensemble des points tels que $\Phi(M) = 2a^2$ est réduit au seul point G
- Si $k > 2a^2$, l'ensemble des points tels que $\Phi(M) = k$ est un cercle de centre G et de rayon $r = \sqrt{\dfrac{k - 2a^2}{2}}$

Pour $k = 4a^2$, alors $MG^2 = \dfrac{2a^2}{2} = a^2$, c'est à dire $MG = a$; c'est un cercle de centre G et de rayon a

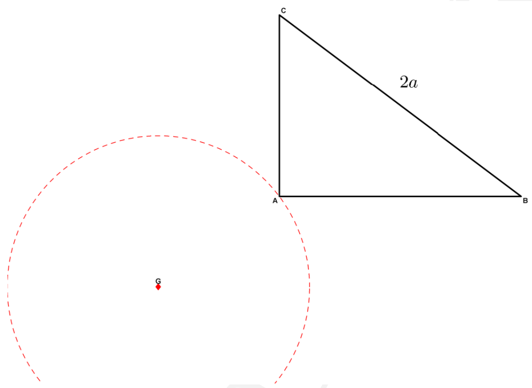

FIGURE 16.22 – Cercle de centre G et de rayon a

2. *Soit ABC un triangle rectangle isocèle en A et nous posons $AC = BA = a$*
   Déterminer l'ensemble des points $M \in \mathcal{P}$ qui vérifient :

$$MA^2 - MB^2 + MC^2 \leqslant a^2$$

Soit Φ, la fonction scalaire de Leibniz définie par :

$$\Phi(M) = MA^2 - MB^2 + MC^2$$

Soit H le barycentre du système pondéré $\{(A,1);(B,-1);(C,1)\}$. Alors, pour tout $M \in \mathcal{P}$, nous avons :

$$\overrightarrow{MH} = \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$$

Et donc, en particulier : $\overrightarrow{AH} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \iff \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{BC}$

D'après 16.6.3, pour tout $M \in \mathcal{P}$, nous avons $\Phi(M) = \Phi(H) + MH^2$

Il faut donc calculer $\Phi(H)$

Nous avons : $\Phi(H) = HA^2 - HB^2 + HC^2$

- Calcul de HA^2
  Nous avons, très simplement, $HA^2 = BC^2 = 2a^2$
- Calcul de HB^2
  Comme d'habitude :

$$\begin{aligned} HB^2 &= \left\langle \overrightarrow{HB} / \overrightarrow{HB} \right\rangle \\ &= \left\langle \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{AB} / \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{AB} \right\rangle \\ &= HA^2 + BA^2 + 2\left\langle \overrightarrow{HA} / \overrightarrow{AB} \right\rangle \end{aligned}$$

Nous avons :

$$\left\langle \overrightarrow{HA}/\overrightarrow{AB} \right\rangle = \left\langle \overrightarrow{BC}/\overrightarrow{AB} \right\rangle = \left\langle \overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}/\overrightarrow{AB} \right\rangle = -AB^2 + \left\langle \overrightarrow{AC}/\overrightarrow{AB} \right\rangle = -AB^2$$

Et donc $HB^2 = 2a^2 + BA^2 - 2AB^2 = a^2$

- Calcul de HC^2

$$\begin{aligned} HC^2 = & \left\langle \overrightarrow{HC}/\overrightarrow{HC} \right\rangle \\ = & \left\langle \overrightarrow{HA}+\overrightarrow{AC}/\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{AC} \right\rangle \\ = & HA^2 + CA^2 + 2\left\langle \overrightarrow{HA}/\overrightarrow{AC} \right\rangle \end{aligned}$$

Nous avons :

$$\begin{aligned} \left\langle \overrightarrow{HA}/\overrightarrow{AC} \right\rangle = & -\left\langle \overrightarrow{BC}/\overrightarrow{AC} \right\rangle \\ = & -\left\langle \overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}/\overrightarrow{AC} \right\rangle \\ = & -AC^2 + \left\langle \overrightarrow{BA}/\overrightarrow{AC} \right\rangle \\ = & -AC^2 \end{aligned}$$

Et donc $HC^2 = 2a^2 + CA^2 - 2AC^2 = a^2$

D'où $\Phi(H) = HA^2 - HB^2 - HC^2 = 2a^2 - a^2 - a^2 = 0$

Donc $\Phi(M) = \Phi(H) + MH^2 = MH^2$. Ainsi, l'ensemble des points $M \in \mathcal{P}$ qui vérifient : $MA^2 - MB^2 + MC^2 \leqslant a^2$ est l'ensemble des points $M \in \mathcal{P}$ qui vérifient : $MH^2 \leqslant a^2 \iff MH \leqslant a$. C'est donc l'intérieur d'un cercle de centre H et de rayon a

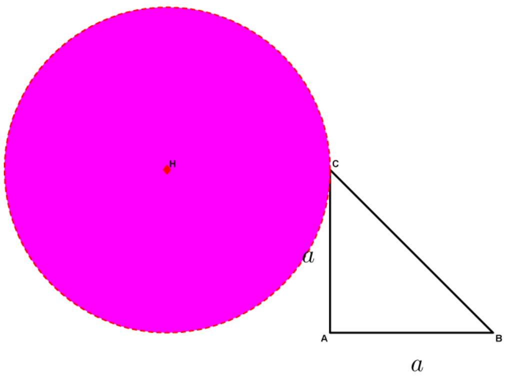

FIGURE 16.23 – L'intérieur du cercle de centre H et de rayon a