Chapitre 17

Applications affines

17.1 Applications qui conservent le barycentre

17.1.1 Définition

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de direction le $\mathbb{R}$-espace vectoriel E. Soit $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ une application.
On dit que f conserve les barycentres si, pour tout système pondéré $\{(A_i, \alpha_i)\, 1 \leqslant i \leqslant n\}$ de barycentre G, $f(G)$ est le barycentre du système pondéré $\{(f(A_i), \alpha_i)\, 1 \leqslant i \leqslant n\}$

Remarque 1 :

1. On pourrait généraliser cette définition à 2 espaces affines $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ et $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{F}$
2. Si $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ est une application bijective qui conserve les barycentres, il est aisé de montrer que la fonction réciproque f^{-1} conserve aussi les barycentres.
3. Il est tout aussi aisé de démontrer que si $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ et $g : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ sont 2 applications qui conservent les barycentres, alors la composée $f \circ g$ conserve aussi les barycentres

17.1.2 Théorème

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de direction le $\mathbb{R}$-espace vectoriel E. Soit $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ une application qui conserve les barycentres.
Soit $\overrightarrow{f} : E \longrightarrow E$ une application définie par :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \overrightarrow{f} : E & \longrightarrow & E \\ \overrightarrow{MN} & \longmapsto & \overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{MN}\right) = \overrightarrow{f(M)\, f(N)} \end{array} \right.$$

Alors, $\overrightarrow{f}$ est une application linéaire

Démonstration

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine et de direction le $\mathbb{R}$-espace vectoriel E ; nous allons démontrer que $\overrightarrow{f}$ est linéaire.

1. **Démontrons que, pour tout $u \in E$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$ nous avons $\overrightarrow{f}(\lambda u) = \lambda \overrightarrow{f}(u)$**

   Soit $u \in E$; alors, il existe $A \in \mathcal{E}$ et $M \in \mathcal{E}$ tels que $u = \overrightarrow{AM}$ et nous avons $\overrightarrow{f}(u) = \overrightarrow{f(A)\, f(M)}$
   Soit $\lambda \in \mathbb{R}$; il existe un seul $N \in \mathcal{E}$ tel que $\lambda u = \overrightarrow{AN} = \lambda \overrightarrow{AM}$
   $N \in \mathcal{E}$ apparaît donc comme le barycentre du système pondéré $\{(A, 1-\lambda) ; (M, \lambda)\}$.
   f conservant le barycentre, $f(N)$ est le barycentre de $\{(f(A), 1-\lambda) ; (f(M), \lambda)\}$ et donc

   $$\overrightarrow{f(A)\, f(N)} = \lambda \overrightarrow{f(A)\, f(M)} = \lambda \overrightarrow{f}(u)$$

   Ce que nous voulions.

2. **Démontrons que, pour tout $u \in E$ et tout $v \in E$ nous avons $\overrightarrow{f}(u+v) = \overrightarrow{f}(u) + \overrightarrow{f}(v)$**

   Soient $u \in E$ et $v \in E$; nous allons nous intéresser à $\overrightarrow{f}(u+v)$.

   Il existe $A \in \mathcal{E}$, $M \in \mathcal{E}$ et $N \in \mathcal{E}$ tels que $u = \overrightarrow{AM}$, $v = \overrightarrow{AN}$ et $X \in \mathcal{E}$ tel que $u + v = \overrightarrow{AX} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN}$ et donc $\overrightarrow{f}(u+v) = \overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{AX}\right) = \overrightarrow{f(A)f(A)}$

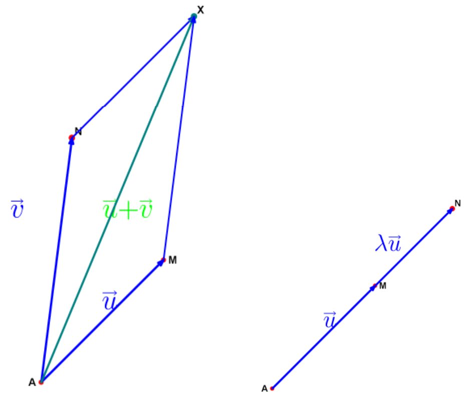

FIGURE 17.1 – Addition de 2 vecteurs et multiplication par un scalaire

   X apparaît alors comme le barycentre du système pondéré $\{(A,-1);(M,1);(N,1)\}$. f conservant le barycentre, $f(X)$ est donc le barycentre du système pondéré $\{(f(A),-1);(f(M),1);(f(N),1)\}$ et donc, nous avons :

$$\overrightarrow{f(A)f(X)} = \overrightarrow{f(A)f(M)} + \overrightarrow{f(A)f(N)} \iff \overrightarrow{f}(u+v) = \overrightarrow{f}(u) + \overrightarrow{f}(v)$$

$\overrightarrow{f}$ est donc une application linéaire

17.1.3 Définition d'homothétie

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de direction E. Soit Ω un point de $\mathcal{E}$ et $k \in \mathbb{R}^*$
On appelle homothétie de centre Ω et de rapport k une application $\mathcal{H}_{\Omega,k}$ telle que :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \mathcal{H}_{\Omega,k} : \mathcal{E} & \longrightarrow & \mathcal{E} \\ M & \longmapsto & \mathcal{H}_{\Omega,k}(M) = M' \text{ où nous avons } \overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M} \end{array}\right.$$

Remarque 2 :

1. Que se passe-t-il si $k = 0$? En fait, nous avons $\overrightarrow{\Omega M'} = \overrightarrow{0}$, et donc, à tout point $M \in \mathcal{E}$, on fait correspondre Ω ; c'est une application constante. Peu intéressante
2. Si $k = 1$, alors $\mathcal{H}_{\Omega,1}$ est l'application identique.

17.1.4 Proposition : les homothéties conservent les barycentres

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de direction E. Les homothéties conservent les barycentres

Démonstration

Soit $\mathcal{H}_{\Omega,k}$ une homothétie de $\mathcal{E}$ et $\{(A_i;\alpha_i)\ 1 \leqslant i \leqslant n\}$ un système pondéré de barycentre G ; nous avons alors, pour tout $O \in \mathcal{E}$:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\right)\overrightarrow{OG} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{OA_i}$$

C'est à dire, en remplaçant O par G :

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = \overrightarrow{0}$$

Nous avons, pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$, $\overrightarrow{\Omega \mathcal{H}_{\Omega,k}(A_i)} = k\overrightarrow{\Omega A_i}$ et $\overrightarrow{\Omega \mathcal{H}_{\Omega,k}(G)} = k\overrightarrow{\Omega G}$
Donc :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{\mathcal{H}_{\Omega,k}(G)\mathcal{H}_{\Omega,k}(A_i)} &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left(\overrightarrow{\mathcal{H}_{\Omega,k}(G)\Omega} + \overrightarrow{\Omega \mathcal{H}_{\Omega,k}(A_i)}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left(-k\overrightarrow{G\Omega} + k\overrightarrow{\Omega A_i}\right) \\
&= -k\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\right)\overrightarrow{G\Omega} + k\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{\Omega A_i} \\
&= k\left(-\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\right)\overrightarrow{G\Omega} + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{\Omega A_i}\right) \\
&= \overrightarrow{0}
\end{aligned}$$

Ce qui montre bien que $\mathcal{H}_{\Omega,k}(G)$ est le barycentre du système pondéré $\{(\mathcal{H}_{\Omega,k}(A_i); \alpha_i) \ 1 \leqslant i \leqslant n\}$
Donc, les homothéties conservent les barycentres

17.1.5 Propriétés des homothéties

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de direction E.

1. **Si $\mathcal{H}_{\Omega,k}$ est une homothétie de rapport k, alors, pour tout $M \in \mathcal{E}$ et tout $N \in \mathcal{E}$, nous avons :**

$$\overrightarrow{\mathcal{H}_{\Omega,k}(M)\mathcal{H}_{\Omega,k}(N)} = k\overrightarrow{MN}$$

2. **Réciproquement, si $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ est une application telle que $M \in \mathcal{E}$ et tout $N \in \mathcal{E}$ nous ayions :**

$$\overrightarrow{f(M)f(N)} = k\overrightarrow{MN} \text{ avec } k \neq 0 \text{ et } k \neq 1$$

Alors, f est une homothétie de rapport k

3. **L'application linéaire $H : E \longrightarrow E$ telle que $H\left(\overrightarrow{MN}\right) = \overrightarrow{\mathcal{H}_{\Omega,k}(M)\mathcal{H}_{\Omega,k}(N)}$ est donc une homothétie vectorielle de rapport k**

Démonstration

1. Soit $\mathcal{H}_{\Omega,k}$ est une homothétie de centre Ω et de rapport k, alors, pour tout $M \in \mathcal{E}$ et tout $N \in \mathcal{E}$, nous avons :

$$\overrightarrow{\mathcal{H}_{\Omega,k}(M)\mathcal{H}_{\Omega,k}(N)} = \overrightarrow{\mathcal{H}_{\Omega,k}(M)\Omega} + \overrightarrow{\Omega\mathcal{H}_{\Omega,k}(N)} = k\overrightarrow{M\Omega} + k\overrightarrow{\Omega N} = k\overrightarrow{MN}$$

Ce que nous voulions

2. Soit $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ une application telle que pour tout $M \in \mathcal{E}$ et tout $N \in \mathcal{E}$ nous ayions : $\overrightarrow{f(M)f(N)} = k\overrightarrow{MN}$ avec $k \neq 0$ et $k \neq 1$
Soient $A \in \mathcal{E}$ et $M \in \mathcal{E}$. Alors, $\overrightarrow{f(A)f(M)} = k\overrightarrow{AM}$
Pour tout point $O \in \mathcal{E}$, nous avons :

$$\overrightarrow{Of(M)} - \overrightarrow{Of(A)} = k\left(\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA}\right) \Longleftrightarrow \overrightarrow{Of(M)} - k\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{Of(A)} - k\overrightarrow{OA}$$

Comme $k \neq 1$, le système pondéré $\{(f(A); 1); (A; -k)\}$ admet un barycentre G tel que :

$$\overrightarrow{Gf(A)} - k\overrightarrow{GA} = \overrightarrow{0} \Longleftrightarrow \overrightarrow{Gf(A)} = k\overrightarrow{GA}$$

Ce qui montre que f est une homothétie de centre G et de rapport k

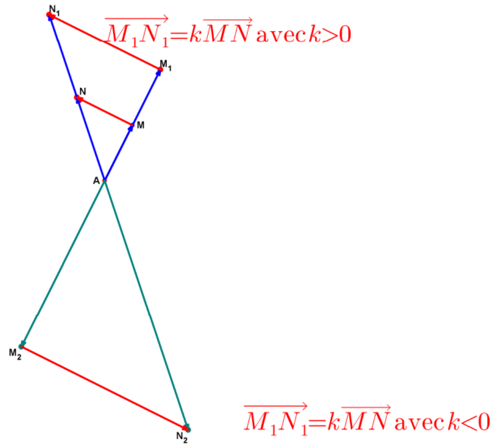

FIGURE 17.2 – Homothéties de rapport $k > 0$ ou $k < 0$

Remarque 3 :

Il faut remarquer qu'à plusieurs homothéties affines différentes correspond une seule homothétie vectorielle. Il suffit de changer de centre d'homothétie.

17.1.6 Proposition

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de direction E. Soit $\Omega \in \mathcal{E}$. Alors, l'ensemble des homothéties de même centre Ω est un groupe abélien pour la composition des applications.Il est isomorphe à $(\mathbb{R}^*, \times)$

Démonstration

1. Soient $h_{\Omega,k}$ et h_{Ω,k_1} 2 homothéties de même centre Ω. Il est clair que Ω est un point fixe pour $h_{\Omega,k} \circ h_{\Omega,k_1}$. D'autre part, si, pour $M \in \mathcal{E}$, nous posons $M_1 = h_{\Omega,k_1}(M)$ et $M_2 = h_{\Omega,k}(M_1)$, nous avons :
$$\overrightarrow{\Omega M_2} = k_1\overrightarrow{\Omega M_1} = k\left(k_1 \times \overrightarrow{\Omega M}\right) = kk_1\overrightarrow{\Omega M}$$
Ainsi, la composition de 2 homothéties de même centre Ω est une homothétie de centre Ω. Nous avons donc $h_{\Omega,k} \circ h_{\Omega,k_1} = h_{\Omega,kk_1}$
C'est donc une loi de composition interne.
2. De l'égalité $h_{\Omega,k} \circ h_{\Omega,k_1} = h_{\Omega,kk_1}$, nous déduisons la commutativité de la composition :
$$h_{\Omega,k} \circ h_{\Omega,k_1} = h_{\Omega,kk_1} = h_{\Omega,k_1} \circ h_{\Omega,k}$$
3. Ensuite, L'identité $\mathrm{Id}_{\mathcal{E}}$ est l'homothétie de rapport 1 et de centre Ω
4. De la relation $h_{\Omega,k} \circ h_{\Omega,k_1} = h_{\Omega,kk_1}$, comme $k \neq 0$, nous pouvons déduire que $h_{\Omega,k}$ est bijective et que $(h_{\Omega,k})^{-1} = h_{\Omega,\frac{1}{k}}$

L'ensemble des homothéties de même centre Ω est bien un groupe abélien pour la composition des applications.
Maintenant, si nous construisons une application φ de $\mathbb{R}^*$ dans le groupe des homothéties de même centre Ω, en posant $\varphi(k) = h_{\Omega,k}$, il est facile de démontrer que φ est un isomorphisme de groupe.

17.1.7 Proposition : les translations conservent les barycentres

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de direction E. Les translations conservent les barycentres

Démonstration

La translation a été définie en 16.1.4. Montrons qu'elles conservent le barycentre.

Soit $\{(A_i, \alpha_i)\ 1 \leqslant i \leqslant n\}$ un système pondéré tel que $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \neq 0$, de barycentre G, et t_u une translation de $\mathcal{E}$

Alors $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = \overrightarrow{0}$.

Appelons $G' = t_u(G)$ et $A'_i = t_u(A_i)$. Il faut montrer que G' est le barycentre du système pondéré $\{(A'_i, \alpha_i)\ 1 \leqslant i \leqslant n\}$

D'après 16.1.5, nous avons $\overrightarrow{GA_i} = \overrightarrow{G'A'_i}$, et donc, nous avons aussi $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{G'A'_i} = \overrightarrow{0}$, ce qui montre que G' est le barycentre du système pondéré $\{(A'_i, \alpha_i)\ 1 \leqslant i \leqslant n\}$

17.1.8 Proposition

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de direction E et T une translation de $\mathcal{E}$ Soit $\overrightarrow{T} : E \longrightarrow E$ une application définie par :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \overrightarrow{T} : E & \longrightarrow & E \\ \overrightarrow{MN} & \longmapsto & \overrightarrow{T}\left(\overrightarrow{MN}\right) = \overrightarrow{T(M)T(N)} \end{array} \right.$$

Alors, $\overrightarrow{T} = \mathrm{Id}_E$

Démonstration

On utilise toujours 16.1.5 ; nous avons donc : $\overrightarrow{T(M)T(N)} = \overrightarrow{MN}$, et donc $\overrightarrow{T}\left(\overrightarrow{MN}\right) = \overrightarrow{MN}$
D'où le résultat

Remarque 4 :

Toujours d'après 16.1.5 on peut dire qu'une application $T : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ est une translation si et seulement si $\overrightarrow{T} = \mathrm{Id}_E$

17.1.9 Proposition

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine et f une application de $\mathcal{E}$ qui est une homothétie ou une translation. Alors, f transforme une droite en une droite qui lui est parallèle.

Démonstration

C'est très simple !!
Pour tout point $M \in \mathcal{E}$ et $N \in \mathcal{E}$, nous avons $\overrightarrow{f(M)f(M)} = k\overrightarrow{MN}$ avec $k \in \mathbb{R}^*$
C'est à dire que, si $M' = f(M)$ et $N' = f(N)$, alors $\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}$, et donc $(M'N') \parallel (MN)$. D'où le résultat.

Remarque 5 :

Donc, les images de 2 droites parallèles sont 2 droites parallèles.

17.1.10 Proposition

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine. Soient $A \in \mathcal{E}$, $B \in \mathcal{E}$, $C \in \mathcal{E}$ et $D \in \mathcal{E}$ tels qu'il existe $k \in \mathbb{R}^*$ tel que $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{CD}$.

1. **Si $k = 1$, il existe une unique translation $T_{\overrightarrow{u}}$ telle que $T_{\overrightarrow{u}}(A) = C$ et $T_{\overrightarrow{u}}(B) = D$**

2. Si $k \neq 1$, alors il existe une et une seule homothétie H telle que $H(A) = C$ et $H(B) = D$

Démonstration

1. Montrons que si $k = 1$, il existe une unique translation $T_{\vec{u}}$ telle que $T_{\vec{u}}(A) = C$ et $T_{\vec{u}}(B) = D$

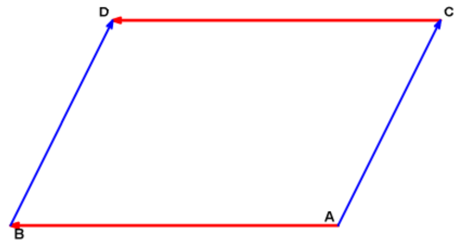

FIGURE 17.3 – Cas où nous avons $k = 1$, c'est à dire$\vec{AB} = \vec{CD}$

Supposons donc que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$; alors $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$ *(parallélogramme)* et donc, en posant $\vec{u} = \overrightarrow{AC}$, nous avons $T_{\vec{u}}(A) = C$ et $T_{\vec{u}}(B) = D$

2. Si $k \neq 1$, alors il existe une et une seule homothétie H telle que $H(A) = C$ et $H(B) = D$

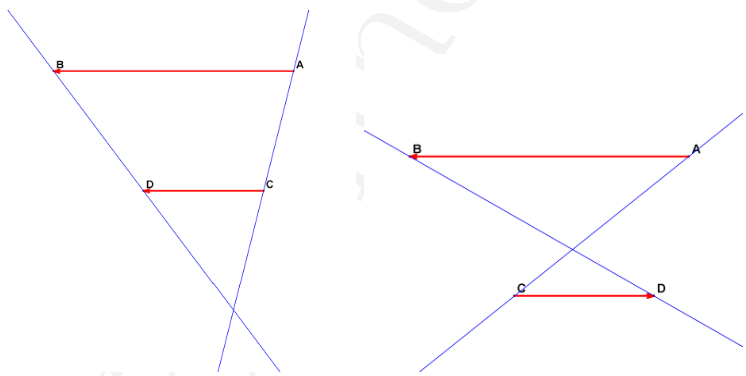

FIGURE 17.4 – Cas où nous avons $k \neq 1$, avec $k > 0$ et $k < 0$

Les droites (AC) et (BD) sont sécantes en Ω.
D'autre part, $\left(\Omega, \overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega B}\right)$ forme un repère cartésien de $\mathcal{E}$.
Les points Ω, A et C étant alignés, nous avons $\overrightarrow{\Omega C} = \lambda \overrightarrow{\Omega A}$ et, de même, puisque Ω, B et D sont alignés, nous avons $\overrightarrow{\Omega D} = \mu \overrightarrow{\Omega B}$
Nous avons :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{CD} &\Longleftrightarrow \overrightarrow{\Omega B} - \overrightarrow{\Omega A} = k\left(\overrightarrow{\Omega D} - \overrightarrow{\Omega C}\right) \\ &\Longleftrightarrow \overrightarrow{\Omega B} - \overrightarrow{\Omega A} = k\mu\overrightarrow{\Omega B} - k\lambda\overrightarrow{\Omega A} \end{aligned}$$

Les vecteurs $\overrightarrow{\Omega A}$ et $\overrightarrow{\Omega B}$ sont linéairement indépendants, et donc nous pouvons déduire :

$$k\mu = 1 \Longleftrightarrow \mu = \frac{1}{k} \text{ et } k\lambda = 1 \Longleftrightarrow \lambda = \frac{1}{k}$$

Et donc :

$$\overrightarrow{\Omega C} = \frac{1}{k}\overrightarrow{\Omega A} \Longleftrightarrow k\overrightarrow{\Omega C} = \overrightarrow{\Omega A} \text{ et } \overrightarrow{\Omega D} = \frac{1}{k}\overrightarrow{\Omega B} \Longleftrightarrow k\overrightarrow{\Omega D} = \overrightarrow{\Omega B}$$

Donc, l'homothétie H, de centre Ω et de rapport $\dfrac{1}{k}$ est telle que $H(A) = C$ et $H(B) = D$

Remarque 6 :

On retrouve ici le théorème de Thalès