## 17.2 Applications affines

### 17.2.1 Définition

**Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de direction le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E$. Soit $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ une application.**
**On dit que $f$ est affine si et seulement si il existe une application linéaire $\overrightarrow{f} : E \longrightarrow E$ telle que :**

$$\begin{cases} \overrightarrow{f} : E & \longrightarrow & E \\ \overrightarrow{MN} & \longmapsto & \overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{MN}\right) = \overrightarrow{f(M)\,f(M)} \end{cases}$$

**On dit que $\overrightarrow{f}$ est l'application linéaire associée à $f$**

**Remarque 7 :**

1. On connaît déjà quelques applications affines : les applications qui conservent le barycentre
2. Plusieurs applications affines peuvent avoir la même application linéaire associée.
   (a) Les translations ont pour application linéaire associée l'application identique du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E$ que nous avons notée $\mathrm{Id}_E$
   (b) Les homothéties de rapport $k \neq 0$, mais de n'importe quel centre, ont pour application linéaire associée l'homothétie vectorielle de rapport $k \neq 0$, $h_k$
3. Est-ce que toutes les applications affines conservent le barycentre ? ? Le théorème suivant y répond.

### 17.2.2 Théorème

**Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de direction $E$**
**$f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ est affine si et seulement si $f$ conserve les barycentres**

**Démonstration**

1. On sait que les applications qui conservent le barycentre sont affines
2. Réciproquement, soit $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ une application affine d'application linéaire associée $\overrightarrow{f}$.

   Soit $\{(A_i, \alpha_i)\ 1 \leqslant i \leqslant n\}$ un système pondéré tel que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \neq 0$ et soit $G$ le barycentre de ce système pondéré.
   Posons $G' = f(G)$ et $A'_i = f(A_i)$ ; il faut donc démontrer que $G'$ est le barycentre de $\{(A'_i, \alpha_i)\ 1 \leqslant i \leqslant n\}$.
   $G$ étant le barycentre, nous avons $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = \overrightarrow{0}$.

   $\overrightarrow{f}$ étant linéaire, $\overrightarrow{f}\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{GA_i}\right) = \overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{0}\right) = \overrightarrow{0}$

   $\overrightarrow{f}$ étant toujours linéaire, $\overrightarrow{f}\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{GA_i}\right) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{GA_i}\right)$ Or, $f$ est affine, et donc $\overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{GA_i}\right) = \overrightarrow{f(G)\,f(A_i)} = \overrightarrow{G'A'_i}$

   D'où nous tirons que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{G'A'_i} = \overrightarrow{0}$, et donc que $G'$ est le barycentre du système pondéré $\{(A'_i, \alpha_i)\ 1 \leqslant i \leqslant n\}$

### 17.2.3 Conséquence de la conservation des barycentres

**Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de direction $E$ et soit $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ une application affine.**

1. **Une application affine $f$ conserve les milieux**
2. **L'image d'un segment $[A, B]$ est, si $f(A) \neq f(B)$, le segement $[f(A) ; f(B)]$**

**Démonstration**

1. Soient $A \in \mathcal{E}$,$B \in \mathcal{E}$ si $I$ est le milieu du segment $[A, B]$, alors $A$ est l'isobarycentre de $A$ et $B$, et donc $f(I)$ est l'isobarycentre de $f(A)$ et $f(B)$, c'est à dire le milieu du segement $[f(A); f(B)]$
2. Un point $X \in [A, B]$ si et seulement si, $X$ est le barycentre du système pondéré $\{(A; \lambda); (B; 1-\lambda)\}$ où $\lambda \in [0; 1]$
   Alors $f$ étant une application affine, conservant donc les barycentres, $f(X)$ est le barycentre de $\{(f(A); \lambda); (f(B); 1-\lambda)\}$ où $\lambda \in [0; 1]$ et donc $f(X)$ est élément de l'intervalle $[f(A); f(B)]$

### 17.2.4 Théorème

**Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de direction $E$. Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de $E$.**
**Soient $A \in \mathcal{E}$ et $B \in \mathcal{E}$ 2 points de $\mathcal{E}$. Alors :**
**Il existe une et une seule application affine $f$ telle que $\varphi = \overrightarrow{f}$ et $f(A) = B$**

**Démonstration**

Soit $f$ une application de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ définie par :

$$\begin{cases} f : \mathcal{E} & \longrightarrow & \mathcal{E} \\ \quad M & \longmapsto & M' = f(M) \end{cases}$$

Où $M'$ est défini par $\overrightarrow{BM'} = \varphi\left(\overrightarrow{AM}\right)$

1. Nous avons $f(A) = B$
   En effet, par construction de $f$, nous avons $\overrightarrow{Bf(A)} = \varphi\left(\overrightarrow{AA}\right) = \overrightarrow{0}$
   Donc, de $\overrightarrow{Bf(A)} = \overrightarrow{0}$, nous tirons $B = f(A)$
2. $f$ est une application affine telle que $\overrightarrow{f} = \varphi$
   En effet, soient $M \in \mathcal{E}$ et $N \in \mathcal{E}$, alors :
   $$\begin{aligned} \overrightarrow{f(M)f(N)} &= \overrightarrow{f(M)f(A)} + \overrightarrow{f(A)f(N)} \\ &= -\overrightarrow{f(A)f(M)} + \overrightarrow{f(A)f(N)} \\ &= -\varphi\left(\overrightarrow{AM}\right) + \varphi\left(\overrightarrow{AN}\right) \text{ par construction de } f \\ &= \varphi\left(-\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN}\right) \text{ par linéarité de } \varphi \\ &= \varphi\left(\overrightarrow{MN}\right) \end{aligned}$$
   Ainsi, $f$ est une application affine et $\overrightarrow{f} = \varphi$
3. $f$ est unique
   Soit $g$ une seconde application affine telle que $\varphi = \overrightarrow{g}$ et $g(A) = B$.
   Soit $M \in \mathcal{E}$ ; alors :
   $$\begin{aligned} \overrightarrow{f(M)g(M)} &= \overrightarrow{f(M)B} + \overrightarrow{Bg(M)} \\ &= \overrightarrow{f(M)f(A)} + \overrightarrow{g(A)g(M)} \\ &= \varphi\left(\overrightarrow{MA}\right) + \varphi\left(\overrightarrow{AM}\right) \\ &= \overrightarrow{0} \end{aligned}$$
   De $\overrightarrow{f(M)g(M)} = \overrightarrow{0}$, nous tirons que, pour tout $M \in \mathcal{E}$, nous avons $f(M) = g(M)$, c'est à dire $f = g$

### 17.2.5 Théorème

**Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de direction $E$. Soient $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ et $g : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ 2 applications affines d'application linéaire respective $\overrightarrow{f}$ et $\overrightarrow{g}$. Alors, l'application $f \circ g$ est affine et $\overrightarrow{f \circ g} = \overrightarrow{f} \circ \overrightarrow{g}$**
**La composition des applications affines est une application affine**

**Démonstration**

1. Nous avons déjà suggéré *(sans toutefois le démontrer)* que la composition de 2 applications qui conservaient le barycentre conservait le barycentre, c'est à dire que la composition de 2 applications affines est encore affine. Nous proposons ici, une seconde démonstration utilisant les applications linéaires associées.
2. Soient donc $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ et $g : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ 2 applications affines d'application linéaire respective $\overrightarrow{f}$ et $\overrightarrow{g}$. Alors, pour tout $M \in \mathcal{E}$ et tout $N \in \mathcal{E}$, nous avons :

$$\overrightarrow{f \circ g\,(M)\, f \circ g\,(N)} = \overrightarrow{f}\left[\overrightarrow{g\,(M)\, g\,(N)}\right] = \overrightarrow{f}\left[\overrightarrow{g}\left(\overrightarrow{MN}\right)\right] = \overrightarrow{f} \circ \overrightarrow{g}\left(\overrightarrow{MN}\right)$$

$f \circ g$ est bien une application affine et nous avons $\overrightarrow{f \circ g} = \overrightarrow{f} \circ \overrightarrow{g}$

### 17.2.6 Théorème

**Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de direction $E$. Soient $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ une applications affines d'application linéaire associée $\overrightarrow{f}$. Alors :**

1. **$f$ est injective si et seulement si $\overrightarrow{f}$ est injective**
2. **$f$ est surjective si et seulement si $\overrightarrow{f}$ est surjective**
3. **$f$ est bijective si et seulement si $\overrightarrow{f}$ est bijective. Dans ce cas, $f^{-1}$ est affine et $\overrightarrow{f^{-1}} = \overrightarrow{f}^{-1}$**

**Démonstration**

1. Démontrons que $f$ est injective si et seulement si $\overrightarrow{f}$ est injective
   → **Supposons que $f$ est injective**
   Alors, pour tout $M \in \mathcal{E}$ et tout $N \in \mathcal{E}$, si $f(M) = f(N)$ alors $M = N$
   Soit donc $\overrightarrow{u} \in \ker \overrightarrow{f}$. Il existe $A \in \mathcal{E}$ et $B \in \mathcal{E}$ tels que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$.
   Nous avons $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{0} \iff \overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{AB}\right) = \overrightarrow{0} \iff \overrightarrow{f(A)\, f(B)} = \overrightarrow{0} \iff f(A) = f(B)$
   De l'injectivité de $f$, nous avons $A = B$, et donc $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ ; ce qui montre que $\overrightarrow{f}$ est injective
   → **Supposons que $\overrightarrow{f}$ est injective**
   Soient $M \in \mathcal{E}$ et $N \in \mathcal{E}$ tels que $f(M) = f(N)$
   Alors $\overrightarrow{f(M)\, f(N)} = \overrightarrow{0}$. Comme $\overrightarrow{f(M)\, f(N)} = \overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{MN}\right)$, ce qui signifie que $\overrightarrow{MN} \in \ker \overrightarrow{f}$.
   Comme $\overrightarrow{f}$ est injective, $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{0}$ et donc $M = N$
   Ce qui traduit que $f$ est donc injective
   Donc $f$ est injective si et seulement si $\overrightarrow{f}$ est injective
2. Démontrons que $f$ est surjective si et seulement si $\overrightarrow{f}$ est surjective
   → **Supposons $f$ surjective**
   Démontrons que $\overrightarrow{f}$ est surjective.
   Soit $\overrightarrow{v} \in E$ ; il existe $A \in \mathcal{E}$ et $B \in \mathcal{E}$ tels que $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB}$.
   $f$ étant surjective, il existe $A_1 \in \mathcal{E}$ et $B_1 \in \mathcal{E}$ tels que $f(A_1) = A$ et $f(B_1) = B$.
   Donc $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{f(A_1)\, f(B_1)} = \overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{A_1B_1}\right)$.
   Il existe donc $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{A_1B_1} \in E$ tel que $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{A_1B_1}\right) = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{u})$
   $\overrightarrow{f}$ est donc surjective
   → **Supposons $\overrightarrow{f}$ surjective**
   Démontrons que $f$ est surjective.
   Soit $A \in \mathcal{E}$ que l'on peut prendre comme origine et on pose $B = f(A)$.
   Soit $N \in \mathcal{E}$ quelconque. Alors $\overrightarrow{BN} \in E$, et $\overrightarrow{f}$ étant surjective, il existe $\overrightarrow{u} \in E$ tel que $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{BN}$. $f$ étant affine, il existe $M \in \mathcal{E}$ tel que $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{f(A)\, f(M)} = \overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{AM}\right)$, c'est à dire tel que $f(M) = N$
   $f$ est donc surjective.

3. Il est maintenant évident que $f$ est bijective si et seulement si $\overrightarrow{f}$ est bijective.
Montrons que $f^{-1}$ est affine et que $\overrightarrow{f^{-1}} = \overrightarrow{f}^{-1}$
Soit $A \in \mathcal{E}$ que l'on peut prendre comme origine et on pose $B = f(A)$.
On appelle $g$ l'application affine d'application linéaire associée $\overrightarrow{f}^{-1}$ et telle que $A = g(B)$. D'après 17.2.4, cette application existe et est unique.
Alors, pour tout point $X \in \mathcal{E}$, nous avons :
$$\overrightarrow{Bf \circ g(X)} = \overrightarrow{f \circ g(B) f \circ g(X)} = \overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{g(B) g(X)}\right) = \overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{f}^{-1}\left(\overrightarrow{BX}\right)\right) = \overrightarrow{BX}$$
Ce qui montre que $\overrightarrow{Bf \circ g(X)} = \overrightarrow{BX}$ et donc que, pour tout $X \in \mathcal{E}$, nous avons $f \circ g(X) = X$, c'est à dire $g = f^{-1}$.
D'où le résultat $f^{-1}$ est affine et que $\overrightarrow{f^{-1}} = \overrightarrow{f}^{-1}$

### 17.2.7 Proposition

**Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de direction $E$ et soit $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ une application affine et d'application linéaire associée $\overrightarrow{f}$**
**Soient $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{E}$ et $\mathcal{F}_2 \subset \mathcal{E}$ 2 sous-espaces affines de $\mathcal{E}$ de <u>même direction</u> $F$, c'est à dire qu'ils sont parallèles. Alors, $f(\mathcal{F}_1)$ et $f(\mathcal{F}_2)$ sont parallèles et de même direction $\overrightarrow{f}(F)$**

**Démonstration**

Il est bien entendu que pour tout $M_1 \in \mathcal{F}_1$, $N_1 \in \mathcal{F}_1$, nous avons $f(M_1) \in f(\mathcal{F}_1)$, $f(N_1) \in f(\mathcal{F}_1)$, $\overrightarrow{M_1N_1} \in F$ et $\overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{M_1N_1}\right) = \overrightarrow{f(M_1) f(N_1)} \in \overrightarrow{f}(F)$
Il en est de même pour tout point $M_2 \in \mathcal{F}_2$, $N_2 \in \mathcal{F}_2$ : $\overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{M_2N_2}\right) = \overrightarrow{f(M_2) f(N_2)} \in \overrightarrow{f}(F)$
Ainsi, $f(\mathcal{F}_1)$ et $f(\mathcal{F}_2)$ sont parallèles

### 17.2.8 Proposition

**Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de direction $E$ et soit $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ une application affine et d'application linéaire associée $\overrightarrow{f}$ Soient $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$ un sous-espaces affines de $\mathcal{E}$ de direction $F$**

1. **Si $\mathcal{F}$ est un plan, alors $f(\mathcal{F})$ est un plan, une droite ou un point**
2. **Si $\mathcal{F}$ est une droite, alors $f(\mathcal{F})$ est une droite ou un point**

**Démonstration**

D'après le théorème du rang, nous avons toujours $\dim \overrightarrow{f}(F) \leqslant \dim F$, et donc, si $F$ est un plan, alors $\dim \overrightarrow{f}(F) = 2$, $\dim \overrightarrow{f}(F) = 1$ ou $\dim \overrightarrow{f}(F) = 0$ ; d'où les résultats.

**Remarque 8 :**

Il est évident qu'on peut généraliser à un sous espace affine de dimension finie quelconque, toujours par le théorème du rang.