Dans ce qui suit, nous nous intéressons à la structure globale des homothéties et des translations

17.2.9 Définition

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de direction E
$\mathcal{H}$ est l'ensemble des homothéties de $\mathcal{E}$ et $\mathcal{T}$ est l'ensemble des translations de $\mathcal{E}$.
On appelle homothétie-translation ou dilatation tout élément de $\mathcal{H} \cup \mathcal{T}$

17.2.10 Théorème

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de direction E et soit $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ une application affine. Alors :
f est une homothétie-translation si et seulement si il existe $k \in \mathbb{R}^*$ tel que, pour tout $M \in \mathcal{E}$ et tout $N \in \mathcal{E}$, nous avons $\overrightarrow{f(M) f(N)} = k\overrightarrow{MN}$
On écrit aussi que $\overrightarrow{f} = k\mathrm{Id}_E$

Démonstration

Ce résultat est la compilation et les synthèse des résultats établis en 17.1.5 et 17.1.8

17.2.11 Corollaire

Voici une autre forme d'énoncé de 17.2.10
Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de direction E. Une application affine $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ est une homothétie translation si et seulement si son application linéaire associée $\overrightarrow{f}$ est une homothétie

Exercice 1 :

Montrer que $\mathcal{H} \cap \mathcal{T} = \{\mathrm{Id}_{\mathcal{E}}\}$

Remarque 9 :

On déduit de 17.2.10 qu'une homothétie-translation est soit une homothétie, soit une translation :

1. Si $k = 1$, c'est une translation
2. Si $k \neq 0$ et $k \neq 1$, c'est une homothétie

17.2.12 Théorème

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de direction E. La composition des homohéties-translations de $\mathcal{E}$ est une homothétie-translation de $\mathcal{E}$, autrement dit :

$$(\forall f \in \mathcal{H} \cup \mathcal{T})\,(\forall g \in \mathcal{H} \cup \mathcal{T})\,(f \circ g \in \mathcal{H} \cup \mathcal{T})$$

La composition des homothéties-translations est une loi interne

Démonstration

- ▷ Soit $f \in \mathcal{H} \cup \mathcal{T}$. Alors, il existe $k_f \in \mathbb{R}^*$ tel que pour tout $M \in \mathcal{E}$ et tout $N \in \mathcal{E}$, $\overrightarrow{f(M) f(N)} = k_f\overrightarrow{MN}$
- ▷ De même, soit $g \in \mathcal{H} \cup \mathcal{T}$. Alors, il existe $k_g \in \mathbb{R}^*$ tel que pour tout $M \in \mathcal{E}$ et tout $N \in \mathcal{E}$, $\overrightarrow{g(M) g(N)} = k_g\overrightarrow{MN}$
- ▷ Alors :
$$\overrightarrow{f \circ g(M) f \circ g(N)} = k_f\overrightarrow{g(M) g(N)} = k_f\left(k_g\overrightarrow{MN}\right) = k_f k_g\overrightarrow{MN}$$

$f \circ g$ est donc bien une homothétie-translation. La loi $\circ$ est bien une loi interne.

Remarque 10 :

1. Nous venons d'établir des résultats sur des formes vectorielles, à savoir que si $k_f \times k_g = 1$, nous obtenons une translation, et que, sinon, nous obtenons une homothétie.
   Une question, cependant, à laquelle il n'a pas été répondu, c'est :

   « **Quel est le type de cette homothétie ? Quel est le type de cette translation ?** »

2. Nous répondons, une première fois, à l'une de ces questions qui ne pose pas de difficulté :

   Si $\Omega \in \mathcal{E}$, $k_1 \in \mathbb{R}^*$ et $k_2 \in \mathbb{R}^*$ et h_{Ω,k_1} et h_{Ω,k_2}, 2 homothéties de même centre, alors $h_{\Omega,k_1} \circ h_{\Omega,k_2} = h_{\Omega,k_1 k_2}$
   - ⋆ Si $k_1 \times k_2 \neq 1$, alors $h_{\Omega,k_1 k_2}$ est une homothétie de centre Ω de rapport $k_1 k_2$
   - ⋆ Si $k_1 \times k_2 = 1$, alors $h_{\Omega,k_1 k_2} = \mathrm{Id}_{\mathcal{E}}$ et $\left(h_{\Omega,k_1}\right)^{-1} = h_{\Omega,k_2} = h_{\Omega,\frac{1}{k_1}}$

3. Plus difficile !! Soit $\Omega \in \mathcal{E}$, $k \in \mathbb{R}$ tel que $k \neq 0$ et $k \neq 1$. Soit $u \in E$ et considérons $h_{\Omega,k} \circ t_u$ et $t_u \circ h_{\Omega,k}$ où t_u est la translation de vecteur u.
   Ces 2 transformations sont une homothétie de rapport k que nous allons chercher à caractériser, en fait, rechercher leur centre qui sera le point fixe des transformations.
   - ⋆ **Etude de $h_{\Omega,k} \circ t_u$**
     Nous savons que $h_{\Omega,k} \circ t_u$ est une homothétie. Appelons C ce centre d'homothétie.

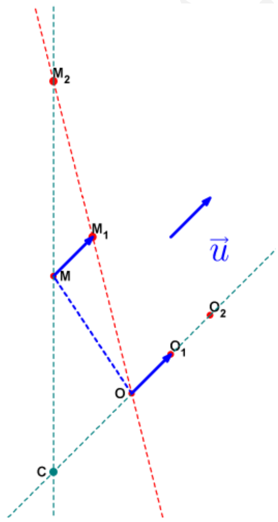

FIGURE 17.5 – La figure représentant $h_{\Omega,k} \circ t_u$

Pour tout point $M \in \mathcal{E}$, appelons $M' = t_u(M)$ et $M'' = h_{\Omega,k}(M')$. Nous avons alors, $\overrightarrow{MM'} = u$ et $\overrightarrow{\Omega M''} = k\overrightarrow{\Omega M'}$ et $\overrightarrow{CM''} = k\overrightarrow{CM}$
Ce qui est vrai pour tout $M \in \mathcal{E}$ l'est aussi pour Ω. Donc, si $\Omega' = t_u(\Omega)$ et $\Omega'' = h_{\Omega,k}(\Omega')$. Nous avons alors, $\overrightarrow{\Omega\Omega'} = u$ et $\overrightarrow{\Omega\Omega''} = k\overrightarrow{\Omega\Omega'} = ku$ et $\overrightarrow{C\Omega''} = k\overrightarrow{C\Omega}$
Donc :

$$\overrightarrow{C\Omega''} = \overrightarrow{C\Omega} + \overrightarrow{\Omega\Omega''} = \overrightarrow{C\Omega} + ku = k\overrightarrow{C\Omega} \Longleftrightarrow (1-k)\overrightarrow{C\Omega} = -ku \Longleftrightarrow \overrightarrow{\Omega C} = \frac{k}{1-k}u$$

Le centre C est donc bien défini.

- ⋆ **Etude de $t_u \circ h_{\Omega,k}$** Nous savons que $t_u \circ h_{\Omega,k}$ est une homothétie. Appelons C ce centre d'homothétie.
  Pour tout point $M \in \mathcal{E}$, appelons $M' = h_{\Omega,k}(M)$ et $M'' = t_u(M')$. Nous avons alors, $\overrightarrow{M'M''} = u$ et $\overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$ et, toujours, $\overrightarrow{CM''} = k\overrightarrow{CM}$
  Ce qui est vrai pour tout $M \in \mathcal{E}$ l'est aussi pour Ω. Alors, $\Omega = h_{\Omega,k}(\Omega)$, et $\Omega'' = t_u(\Omega)$, nous avons alors, $\overrightarrow{\Omega\Omega''} = u$ et $\overrightarrow{C\Omega''} = k\overrightarrow{C\Omega}$

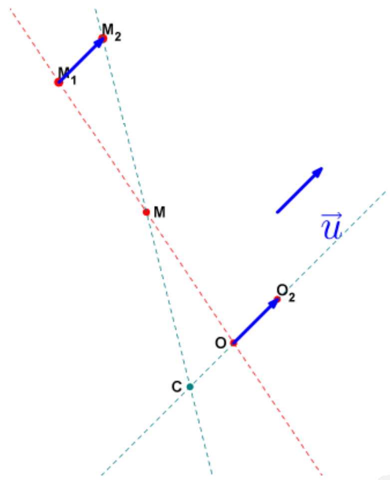

FIGURE 17.6 – La figure représentant $t_u \circ h_{\Omega,k}$

Donc :

$$\overrightarrow{C\Omega''} = \overrightarrow{C\Omega} + \overrightarrow{\Omega\Omega''} = k\overrightarrow{C\Omega} \Longleftrightarrow (1-k)\,\overrightarrow{C\Omega} = -\overrightarrow{\Omega\Omega''} = -u \Longleftrightarrow \overrightarrow{\Omega C} = \frac{1}{1-k}u$$

Le centre C est donc toujours bien défini.
Rien que par ces calculs, nous voyons que $t_u \circ h_{\Omega,k} \neq h_{\Omega,k} \circ t_u$ et que donc, la composition des applications dans $\mathcal{H} \cup \mathcal{T}$ n'est pas commutative

4. Plus largement, soient $\Omega_1 \in \mathcal{E}$, $\Omega_2 \in \mathcal{E}$, $k_1 \in \mathbb{R}^*$ et $k_2 \in \mathbb{R}^*$; considérons h_{Ω_1,k_1} et h_{Ω_2,k_2} et nous allons travailler $h_{\Omega_1,k_1} \circ h_{\Omega_2,k_2}$
   ⋆ **Supposons $k_1 \times k_2 = 1$**
   Alors, clairement, $k_1 = \dfrac{1}{k_2}$. pour simplifier, nous allons poser $k_1 = k$ et donc $k_2 = \dfrac{1}{k}$ et nous allons étudier $h_{\Omega_2,\frac{1}{k}} \circ h_{\Omega_1,k}$.

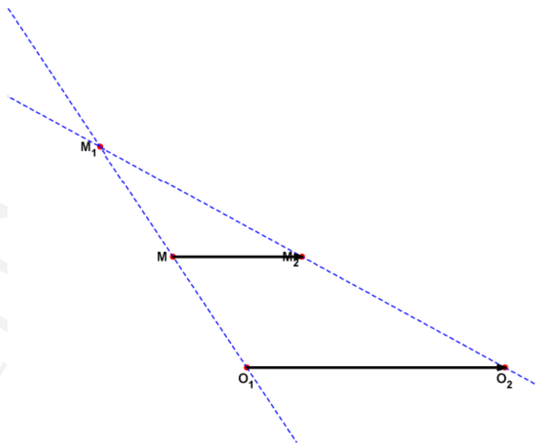

FIGURE 17.7 – La figure représentant $h_{\Omega_2,\frac{1}{k}} \circ h_{\Omega_1,k}$

Pour $M \in \mathcal{E}$, appelons $M' = h_{\Omega_1,k}(M)$ et $M'' = h_{\Omega_2,\frac{1}{k}}(M')$. Nous avons alors :
- $\overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega_1 M} \Longleftrightarrow \overrightarrow{\Omega_1 M} = \dfrac{1}{k}\overrightarrow{\Omega_1 M'}$
- $\overrightarrow{\Omega_2 M''} = \dfrac{1}{k}\overrightarrow{\Omega_2 M'} \Longleftrightarrow \overrightarrow{\Omega_2 M'} = k\overrightarrow{\Omega_2 M''}$

D'après 17.2.10, $h_{\Omega_2,\frac{1}{k}} \circ h_{\Omega_1,k}$ est une translation ; il faut donc montrer que le vecteur $\overrightarrow{MM''}$

est constant. Nous avons :

$$\overrightarrow{MM''} = \overrightarrow{M\Omega_1}+\overrightarrow{\Omega_1\Omega_2}+\overrightarrow{\Omega_2M''} = \frac{1}{k}\overrightarrow{M'\Omega_1}+\overrightarrow{\Omega_1\Omega_2}+\frac{1}{k}\overrightarrow{\Omega_2M'} = \frac{1}{k}\overrightarrow{\Omega_2\Omega_1}+\overrightarrow{\Omega_1\Omega_2} = \left(1-\frac{1}{k}\right)\overrightarrow{\Omega_1\Omega_2}$$

Ainsi, nous avons $\overrightarrow{MM''} = \left(1-\frac{1}{k}\right)\overrightarrow{\Omega_1\Omega_2}$ et donc $h_{\Omega_2,\frac{1}{k}} \circ h_{\Omega_1,k}$ est une translation de vecteur $\left(1-\frac{1}{k}\right)\overrightarrow{\Omega_1\Omega_2}$, ce qui montre, une fois de plus, que la composition n'est pas commutative.

⋆ **Supposons, maintenant que $k_1 \times k_2 \neq 1$**

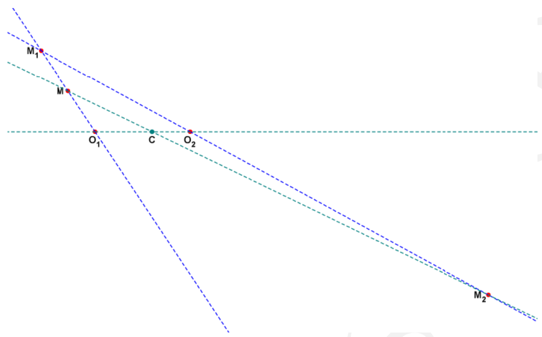

FIGURE 17.8 – La figure représentant $h_{O_2,k_2} \circ h_{O_1,k_1}$ avec $k_1 \times k_2 \neq 1$

Nous savons que $h_{O_2,k_2} \circ h_{O_1,k_1}$ avec $k_1 \times k_2 \neq 1$ est une homothétie de centre C et de rapport k_1k_2

Nous avons bien évidemment $h_{O_1,k_1}(O_1) = O_1$. Posons $h_{O_2,k_2}(O_1) = O'$ et nous avons, là, $\overrightarrow{O_2O'} = k_2\overrightarrow{O_2O_1}$.

D'autre part, nous avons aussi : $\overrightarrow{CO'} = k_1k_2\overrightarrow{CO_1}$.

Donc :

$$\overrightarrow{CO'} = \overrightarrow{CO_2} + \overrightarrow{O_2O'} = \overrightarrow{CO_2} + k_2\overrightarrow{O_2O_1} \text{ et } \overrightarrow{CO_1} = \overrightarrow{CO_2} + \overrightarrow{O_2O_1}$$

D'où nous avons :

$$\begin{gathered}\overrightarrow{CO'} = k_1k_2\overrightarrow{CO_1}\\ \Longleftrightarrow\\ \overrightarrow{CO_2} + k_2\overrightarrow{O_2O_1} = k_1k_2\overrightarrow{CO_2} + k_1k_2\overrightarrow{O_2O_1}\\ \Longleftrightarrow\\ (1-k_1k_2)\overrightarrow{CO_2} = (k_1k_2-k_2)\overrightarrow{O_2O_1}\\ \Longleftrightarrow\\ \overrightarrow{O_2C} = \frac{k_1k_2-k_2}{k_2k_1-1}\overrightarrow{O_2O_1}\end{gathered}$$

Ainsi, nous avons $\overrightarrow{O_2C} = \left(\frac{k_1k_2-k_2}{k_2k_1-1}\right)\overrightarrow{O_2O_1}$, ce qui définit bien le centre C et montre que C est sur la droite (O_1O_2)

17.2.13 Théorème

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de direction E. Soit $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ une homothétie translation.
Soit $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$ un sous-espace affine de $\mathcal{E}$ de direction F, sous-espace vectoriel de E. Alors, $\mathcal{F}$ et $f(\mathcal{F})$ sont parallèles

Démonstration

Que f soit une homothétie-translation veut dire qu'il existe $k \in \mathbb{R}^*$ tel que pour tout $M \in \mathcal{F}$ et tout $N \in \mathcal{F}$, nous avons $\overrightarrow{f(M)f(N)} = k\overrightarrow{MN}$, ce qui veut dire que $\overrightarrow{f(M)f(N)} \in F$, et donc que $f(\mathcal{F})$ admet F comme direction ; ce qui veut dire que $\mathcal{F}$ et $f(\mathcal{F})$ sont parallèles

17.2.14 Quelques exercices

Exercice 2 :

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de dimension 2. Par 2 points E et F pris sur les côtés $[A;B]$ et $[C;D]$ d'un quadrilatère $ABCD$, on mène des parallèles à la diagonale $[B;D]$ qui coupent les côtés $[A;D]$ et $[C;D]$ respectivement en H et G.

1. Si le quadrilatère $EFGH$ est un parallélogramme, démontrer que les droites (EF) et (HG) sont parallèles à (AC)
2. Démontrer que si les droites (EF) et (HG) sont sécantes, alors leur point de concours est sur la droite (AC)

Exercice 3 :

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine et G le barycentre d'un système pondéré $\{(A,2);(B,-1);(C,1)\}$. Soit $f:\mathcal{E}\longrightarrow\mathcal{E}$ l'application qui à tout $M\in\mathcal{E}$ fait correspondre le point $M'\in\mathcal{E}$ tel que :

$$\overrightarrow{GM'}=2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}$$

Quelle est la nature de f ?

Exercice 4 :

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine ; on considère $A\in\mathcal{E}$ et $B\in\mathcal{E}$, 2 points de $\mathcal{E}$ tels que $A\neq B$

1. Quelles sont les conditions sur $\alpha\in\mathbb{R}$ et $\beta\in\mathbb{R}$ pour que, pour tout point $M\in\mathcal{E}$, il existe un point $M'\in\mathcal{E}$ tel que :
$$\alpha\overrightarrow{M'A}+\beta\overrightarrow{M'B}+2\overrightarrow{M'M}=\overrightarrow{0}$$
2. La condition sur α et β étant réalisée, on désigne par $f:\mathcal{E}\longrightarrow\mathcal{E}$ l'application qui à tout $M\in\mathcal{E}$ fait correspondre le point $M'\in\mathcal{E}$.
   (a) Déterminer, suivant les valeurs α et β, l'ensemble des points invariants par f
   (b) On suppose $\alpha+\beta=0$. Pour tout point $M\in\mathcal{E}$, exprimer le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{AB}$ et α
   (c) On suppose $\alpha+\beta\neq0$. Montrer que f est une homothétie dont on déterminera le centre et le rapport

17.2.15 Expression analytique d'application affine en dimension 3

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de dimension 3 et de direction E. On suppose $\{i;j;k\}$ base de E et O origine de $\mathcal{E}$. Soit $f:\mathcal{E}\longrightarrow\mathcal{E}$ une application affine d'application linéaire associée $\overrightarrow{f}$. Si $M=(x,y,z)\in\mathcal{E}$ et $f(M)=(x',y',z')\in\mathcal{E}$, la définition analytique de f est donnée par :

$$\begin{cases} x' = & a_1x+b_1y+c_1a+\alpha \\ y' = & a_2x+b_2y+c_2a+\beta \\ z' = & a_3x+b_3y+c_3a+\gamma \end{cases}$$

Avec, pour $i=1,2$, $a_i\in\mathbb{R}$, $b_i\in\mathbb{R}$ et $c_i\in\mathbb{R}$ et $\alpha\in\mathbb{R}$, $\beta\in\mathbb{R}$, $\gamma\in\mathbb{R}$

Démonstration

Soient donc $M\in E$ avec $M=(x,y,z)$ et $f(M)=(x',y',z')$. Nous appelons $f(O)=(\alpha,\beta,\gamma)$.
Par définition d'application affine, nous avons $\overrightarrow{f(O)\,f(M)}=\overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{OM}\right)$.

Or, $\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, et $\overrightarrow{f(O)\,f(M)} = \begin{pmatrix} x'-\alpha \\ y'-\beta \\ z'-\gamma \end{pmatrix}$ si $\mathcal{M}_{\{i;j;k\}}\left(\overrightarrow{f}\right) = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$, nous avons :

$$\begin{pmatrix} x'-\alpha \\ y'-\beta \\ z'-\gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

D'où, par calcul, nous avons le résultat

17.2.16 Corollaire

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de dimension 3 et de direction E. On suppose $\{i;j;k\}$ base de E et O origine de $\mathcal{E}$. Soit $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ une application affine d'application linéaire associée $\overrightarrow{f}$ et de définition analytique donnée par :

$$\begin{cases} x' = & a_1x + b_1y + c_1a + \alpha \\ y' = & a_2x + b_2y + c_2a + \beta \\ z' = & a_3x + b_3y + c_3a + \gamma \end{cases} \quad \textbf{avec pour } i = 1,2, a_i \in \mathbb{R}, b_i \in \mathbb{R}, c_i \in \mathbb{R}, \alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R}, \gamma \in \mathbb{R}$$

Alors, la définition analytique de $\overrightarrow{f}$ est :

$$\begin{cases} x' = & a_1x + b_1y + c_1a \\ y' = & a_2x + b_2y + c_2a \\ z' = & a_3x + b_3y + c_3a \end{cases} \quad \textbf{avec pour } i = 1,2, a_i \in \mathbb{R}, b_i \in \mathbb{R}, c_i \in \mathbb{R}$$

Remarque 11 :

Il y a une écriture *(appelée notation de Grassmann)* qui est utilisée dans beaucoup d'ouvrages de géométrie de l'enseignement supérieur et qu'on peut donner maintenant ; elle n'a pas ma faveur parce qu'elle mélange applications affines et applications linéaires. C'est celle ci :

> **Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de direction E et $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ une application affine d'application linéaire associée $\overrightarrow{f}$**
> **Etant donnée une origine $O \in \mathcal{E}$, nous pouvons écrire, pour tout $M \in \mathcal{E}$:**
>
> $$f(M) = f(O) + \overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{OM}\right)$$

Quelque part, la définition analytique proposée en 17.2.16 tient d'une telle écriture.

En effet, si $M = (x, y, z)$, $f(M) = (x', y', z')$, $f(O) = (\alpha, \beta, \gamma)$ et $\mathcal{M}_{\{i;j;k\}}\left(\overrightarrow{f}\right) = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$, nous avons :

$$\begin{array}{cccc} f(M) = & f(O) + & & \overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{OM}\right) \\ \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} & = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} & + & \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \end{array}$$

Exercice 5 :

Dans le plan $\mathcal{P}$, muni d'un repère $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$, on considère l'application affine f de définition analytique :

$$\begin{cases} x' = & -3x + 4y - 12 \\ y' = & -\dfrac{3}{2}x + 2y - 3 \end{cases}$$

1. Montrer qu'il existe un et un seul point invariant
2. Démontrer que l'image du plan $\mathcal{P}$ est une droite $\mathcal{D}$
3. Pour tout point $M \in \mathcal{P}$ d'image $M' \in \mathcal{P}$ par f, démontrer que le milieu du bipoint (M, M') appartient à une droite fixe Δ
4. En déduire une construction simple de $M' = f(M)$

Exercice 6 :

Dans le plan $\mathcal{P}$, muni d'un repère $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$, on considère l'application affine $f : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}$ telle que $f(O) = O'$ où $O' = (-1; -1)$. On suppose que $\overrightarrow{f}$ admet comme définition analytique :

$$\left\{\begin{array}{ll} x' = & 4x - 5y \\ y' = & 5x \end{array}\right.$$

Donner la définition analytique de f.

17.2.17 Théorème

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de dimension 3 et $\{A, B, C, D\}$ un repère affine de $\mathcal{E}$.
Soient X, Y, Z, T, 4 points de $\mathcal{E}$. Alors, il existe une et une seule application affine f de $\mathcal{E}$ telle que :

$$f(A) = X \quad f(B) = Y \quad f(C) = Z \quad f(D) = T$$

Et f est une bijection si et seulement si $\{X, Y, Z, T\}$ est un repère affine de $\mathcal{E}$

<u>**Démonstration**</u>

1. Soit donc $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ une application affine d'application linéaire associée $\overrightarrow{f}$. D'après 17.2.4, cette application est évidemment unique
2. Pour tout point $M \in \mathcal{E}$, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}$ et $\gamma \in \mathbb{R}$ uniques tels que $\overrightarrow{AM} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC} + \gamma\overrightarrow{AD}$
   Et nous avons, puisque f est affine et que $f(A) = X$, $f(B) = Y$, $f(C) = Z$ et $f(D) = T$:
   $$\overrightarrow{Xf(M)} = \alpha\overrightarrow{XY} + \beta\overrightarrow{XZ} + \gamma\overrightarrow{XT}$$
   Si $\{X, Y, Z, T\}$ est un repère affine de $\mathcal{E}$ alors $f(M)$ est bien défini et unique. Donc f est une bijection.
3. Si f est une bijection, alors, $\overrightarrow{f}$ est aussi une bijection. Si $\{A, B, C, D\}$ est un repère affine de $\mathcal{E}$, alors $\left\{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right\}$ est une base de E, $\mathbb{R}$-espace vectoriel associé à $\mathcal{E}$.
   $\overrightarrow{f}$ étant une bijection, $\left\{\overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{AB}\right), \overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{AC}\right), \overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{AD}\right)\right\}$ est aussi une base de E, $\mathbb{R}$-espace vectoriel associé à $\mathcal{E}$.
   Or, $\left\{\overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{AB}\right), \overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{AC}\right), \overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{AD}\right)\right\} = \left\{\overrightarrow{XY}, \overrightarrow{XZ}, \overrightarrow{XT}\right\}$, et donc $\{X, Y, Z, T\}$ est un repère affine de $\mathcal{E}$

17.2.18 Exercices

Exercice 7 :

On considère le plan affine $\mathcal{P}$ muni d'un repère affine $\{A; B; C\}$. On considère l'application affine $f : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}$ définie par :

$$f(A) = B \quad f(B) = C \quad f(C) = A$$

1. Quelles sont les images des droites (AB), (BC) et (AC) ?
2. Quelles sont les images A', B' et C', milieux de $[B; C]$, $[A; C]$ et $[B; A]$
3. Montrer que le centre de gravité du triangle ABC est invariant
4. Démontrer que $f^3 = f \circ f \circ f$ est l'identité

Exercice 8 :

On considère le plan affine $\mathcal{P}$ muni d'un repère cartésien $\mathcal{R}\left(\left\{O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right\}\right)$. On considère les points A, B, C, A', B' et C' de coordonnées respectives dans le repère $\mathcal{R}$:

$$A = (3,1) \quad B = (3,-1) \quad C = (2,1) \quad A' = (2,5) \quad B' = (4,3) \quad C' = (1,4)$$

On appelle g l'application affine telle que $g(A) = A'$, $g(B) = B'$ et $g(C) = C'$

1. Donner la définition analytique de g
2. Déterminer le point invariant I de g
3. Déterminer le barycentre du système pondéré $\{(I,6);(A,1);(B,1)\}$
4. En déduire le barycentre du système pondéré $\{(I,6);(A',1);(B',1)\}$

Exercice 9 :

On considère le plan affine $\mathcal{P}$ muni d'un repère cartésien $\mathcal{R}\left(\left\{O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right\}\right)$. On considère l'application affine $f : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}$ dont la définition analytique est donnée par :

$$\begin{cases} x' = & x+y-3 \\ y' = & x-y+2 \end{cases}$$

1. Existe-t-il un point invariant ? ?
2. Quelle est l'image d'une droite d'équation $ax+by+c=0$?
3. Existe-t-il des droites (D) parallèles à leur image ?
4. Existe-t-il des droites (D) globalement invariantes ?

Exercice 10 :

On considère le plan affine $\mathcal{P}$ muni d'un repère cartésien $\mathcal{R}\left(\left\{O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right\}\right)$. Soit $a \in \mathbb{R}^*$; on appelle f_a l'application affine qui a tout point $M = (x,y)$ fait correspondre le point $M' = (x',y')$ où les coordonnées de M' sont définies par :

$$\begin{cases} x' = & ax-ay+1-a \\ y' = & ay \end{cases}$$

1. Démontrer que f_a est bijective
2. Déterminer, suivant les valeurs de a, l'ensemble des points invariants par f_a
3. Dans cette question, on considère le cas où $a=1$
   (a) Démontrer que l'image de la doite $\left(O, \overrightarrow{j}\right)$ est une droite (Δ) que l'on déterminera
   (b) Soit (D) une droite parallèle à la droite $\left(O, \overrightarrow{i}\right)$; déterminer l'image de (D) par f_1
   (c) Soit $M \in \mathcal{P}$ quelconque d'image M'. La droite (D_M) passant par M et parallèle à la droite $\left(O, \overrightarrow{i}\right)$ coupe les droites $\left(O, \overrightarrow{j}\right)$ et (Δ) respectivement en R et S
   Comparez $\overrightarrow{MM'}$ et $\overrightarrow{RS}$ et en déduire une construction géométrique de M' à partir de M

Exercice 11 :

On considère le plan affine $\mathcal{P}$ muni d'un repère cartésien $\mathcal{R}\left(\left\{O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right\}\right)$. On considère l'application affine $T : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}$ qui a tout point $M = (x,y)$ fait correspondre le point $M' = (x',y')$ où les coordonnées de M' sont définies par :

$$\begin{cases} x' = & 2x+3y \\ y' = & x+2y \end{cases}$$

1. Soit $m \in \mathbb{R}$ et nous considérons la droite (D_m) d'équation $y - mx = 0$. Démontrer que T transforme la droite (D_m) en une droite $\left(D_m^1\right)$ contenant l'origine du repère O et dont on donnera la pente en fonction de m.
   Quelle est le droite $\left(D_m^1\right)$ lorsque $m = -\dfrac{2}{3}$?

2. (a) Déterminer la droite (Δ), contenant l'origine O qui est transformée par T en une droite orthogonale à (Δ)
   (b) Démontrer que si $M \in (\Delta)$, alors M' se déduite de M par une symétrie orthogonale par rapport à une droite que l'on déterminera.
3. (a) Trouver les 2 valeurs de m telles que (D_m) coïncide avec sa transformée $\left(D_m^1\right)$. L'une de ces deux droites (D_m) ainsi obtenue a une pente positive. Nous appellerons (Δ_1) cette droite ; l'autre sera notée (Δ_2)
   (b) Si $M \in (\Delta_1)$, démontrer que M' se déduit de M par une homothétie de centre O dont on déterminera le rapport $k_1 \in \mathbb{R}$
   (c) Etudier la même question pour (Δ_2)

Exercice 12 :

On considère le plan affine $\mathcal{P}$ muni d'un repère cartésien $\mathcal{R}\left(\left\{O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right\}\right)$. Soit $\overrightarrow{P}$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel associé à $\mathcal{P}$ de base $\left\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right\}$.
Donner la définition analytique de l'application affine f qui associe au point $A = (1, 2)$ le point $A' = (-1, 3)$ et dont l'application linéaire associée $\overrightarrow{f}$ a pour matrice dans la base $\left\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right\}$:

$$\mathcal{M}_{\left\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right\}}\left(\overrightarrow{f}\right) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$