17.3 Projections, Symétries, Affinités

17.3.1 Espaces affines supplémentaires

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de direction $\overrightarrow{E}$.
2 sous-espaces affines $X \subset \mathcal{E}$ et $Y \subset \mathcal{E}$ de directions respectives $\overrightarrow{X}$ et $\overrightarrow{Y}$ sont supplémentaires dans $\mathcal{E}$ si et seulement si :

1. **$X \cap Y = \{O\}$, c'est à dire que l'intersection de X et Y est réduite à un seul point.**
2. **$\overrightarrow{X} \oplus \overrightarrow{Y} = \overrightarrow{E}$ (c'est à dire que $\overrightarrow{X}$ et $\overrightarrow{Y}$ sont supplémentaires dans $\overrightarrow{E}$.**

Exemple 1 :

1. Dans l'espace $\overrightarrow{E}$ de dimension 3 Dans un espace $\overrightarrow{E}$ de dimension 3, 2 sous-espaces affines $X \subset \mathcal{E}$ et $Y \subset \mathcal{E}$ sont supplémentaires si et seulement si :
   $\rightarrow$ X est un point et $Y = \mathcal{E}$
   $\rightarrow$ X est une droite et Y un plan de $\mathcal{E}$, ne contenant pas X et tels que $X \cap Y = \{O\}$
2. Dans le plan $\overrightarrow{P}$ de dimension 2 Dans un plan $\overrightarrow{P}$, 2 sous-espaces affines $X \subset \mathcal{P}$ et $Y \subset \mathcal{P}$ sont supplémentaires si et seulement si :
   $\rightarrow$ X est un point et $Y = \mathcal{P}$
   $\rightarrow$ X est une droite et Y une droite différente et non parallèle à Y

17.3.2 Définition de projection affine

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de direction $\overrightarrow{E}$.
Soient $X \subset \mathcal{E}$ un sous-espace affine de $\mathcal{E}$ de direction $\overrightarrow{X}$. Soit $\overrightarrow{Y}$ un sous-espace vectoriel supplémentaire de $\overrightarrow{X}$ dans $\overrightarrow{E}$, c'est à dire que $\overrightarrow{X} \oplus \overrightarrow{Y} = \overrightarrow{E}$
Nous appelons projection sur X de direction $\overrightarrow{Y}$, l'application p ainsi définie :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} p : \mathcal{E} & \longrightarrow & \mathcal{E} \\ M & \longmapsto & p\left(M\right) \end{array} \right.$$

Où $p\left(M\right)$ est l'unique point d'intersection de X avec le sous espace affine de $\mathcal{E}$ passant par M et de direction $\overrightarrow{Y}$

Remarque 12 :

1. Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de direction $\overrightarrow{E}$.
   Soient $X \subset \mathcal{E}$ et $Y \subset \mathcal{E}$ 2 sous-espaces affines supplémentaires de $\mathcal{E}$, de direction respectives $\overrightarrow{X}$ et $\overrightarrow{Y}$ et tels que $X \cap Y = \{O\}$
   Pour tout point $M \in \mathcal{E}$, il existe $\overrightarrow{u_X} \in \overrightarrow{X}$ et $\overrightarrow{v_Y} \in \overrightarrow{Y}$, uniques tels que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{u_X} + \overrightarrow{v_y}$.
   Il existe un unique point, que nous notons $p\left(M\right)$ tels que $\overrightarrow{u_X} = \overrightarrow{Op\left(M\right)}$; nous avons donc $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{Op\left(M\right)} + \overrightarrow{v_y}$
   La projection sur X parallèlement à $\overrightarrow{Y}$, l'application p est telle que $p\left(M\right)$ est l'unique point de X tel que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{Op\left(M\right)} + \overrightarrow{v_y}$ et défini ci-dessus
2. Nous avons toujours $\overrightarrow{Mp\left(M\right)} \in \overrightarrow{Y}$
3. Il y a une projection particulière qui est très importante : la projection orthogonale dans les espaces affines euclidiens.
   Soit $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien de direction $\overrightarrow{E}$.
   Soient $X \subset \mathcal{E}$ un sous-espace affine de $\mathcal{E}$ de direction $\overrightarrow{X}$.
   Nous appelons projection orthogonale sur X , toute projection affine sur X de direction $\overrightarrow{X}^{\perp}$
   Nous avons alors $\overrightarrow{Mp\left(M\right)} \in \overrightarrow{X}^{\perp}$

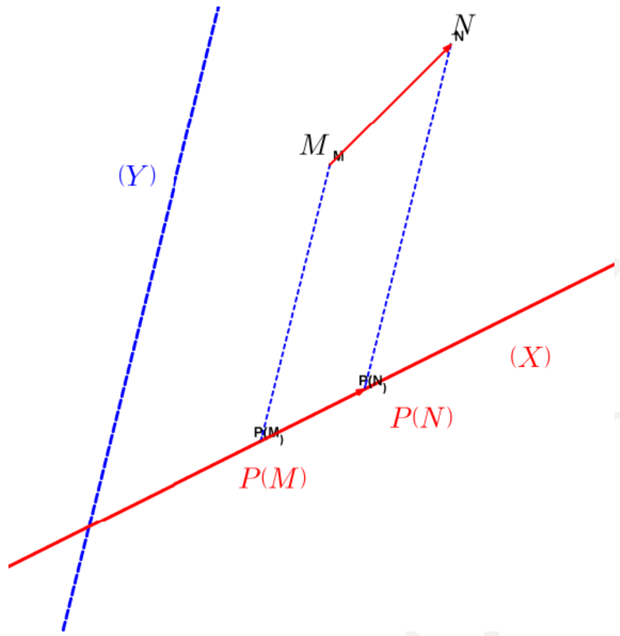

FIGURE 17.9 – Visualisation d'une projection

17.3.3 Théorème

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de direction $\overrightarrow{E}$.
Soient $X \subset \mathcal{E}$ un sous-espace affine de $\mathcal{E}$ de direction $\overrightarrow{X}$. Soit $\overrightarrow{Y}$ un sous-espace vectoriel supplémentaire de $\overrightarrow{X}$ dans $\overrightarrow{E}$,
Soit p la projection sur X de direction $\overrightarrow{Y}$; alors :

1. **p est une application affine. Son application linéaire associée est $\overrightarrow{p}$ la projection vectorielle sur $\overrightarrow{X}$ parallèlement à $\overrightarrow{Y}$**
2. **p est une application affine telle que $p \circ p = p^2 = p$**
3. **L'ensemble des points invariants par p est X**

Démonstration

Il faudra beaucoup se reférer à la figure 17.9

1. **Montrons que p est une application affine**
   Soient $M \in \mathcal{E}$ et $N \in \mathcal{E}$. Alors :
   $$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{Mp\,(M)} + \overrightarrow{p\,(M)\,p\,(N)} + \overrightarrow{p\,(N)\,N} = \overrightarrow{p\,(M)\,p\,(N)} + \overrightarrow{Mp\,(M)} + \overrightarrow{p\,(N)\,N}$$
   Or, $\overrightarrow{p\,(M)\,p\,(N)} \in \overrightarrow{X}$ et $\overrightarrow{Mp\,(M)} + \overrightarrow{p\,(N)\,N} \in \overrightarrow{Y}$
   C'est à dire :
   $$\overrightarrow{MN} = \underbrace{\overrightarrow{p\,(M)\,p\,(N)}}_{\in \overrightarrow{X}} + \underbrace{\overrightarrow{Mp\,(M)} + \overrightarrow{p\,(N)\,N}}_{\in \overrightarrow{Y}}$$
   Les sous-espace vectoriel $\overrightarrow{X}$ et $\overrightarrow{Y}$ étant supplémentaires dans $\overrightarrow{E}$, le vecteur $\overrightarrow{p\,(M)\,p\,(N)}$ apparait comme la projection vectorielle ϖ sur $\overrightarrow{X}$ parallèlement à $\overrightarrow{Y}$.
   Nous avons donc $\varpi\left(\overrightarrow{MN}\right) = \overrightarrow{p\,(M)\,p\,(N)}$.
   Donc p est une application affine d'application linéaire associée $\overrightarrow{p} = \varpi$

2. **Montrons que $p \circ p = p^2 = p$**
Soit $M \in \mathcal{E}$; alors $p(M) \in X$.
Considérons $p^2(M) = p \circ p(M) = p[p(M)]$.
Par définition, nous avons $p^2(M) \in X$ et donc $\overrightarrow{p(M)p^2(M)} \in \overrightarrow{X}$; de plus, par définition de la projection p, nous avons aussi $\overrightarrow{p(M)p^2(M)} \in \overrightarrow{Y}$.
Comme les sous-espace vectoriel $\overrightarrow{X}$ et $\overrightarrow{Y}$ sont supplémentaires dans $\overrightarrow{E}$, nous avons $\overrightarrow{X} \cap \overrightarrow{Y} = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$. Nous en déduisons que, pour tout $M \in \mathcal{E}$, nous avons $\overrightarrow{p(M)p^2(M)} = \overrightarrow{0}$, c'est à dire $p^2(M) = p(M)$.
Donc, nous avons bien $p \circ p = p$
3. **Montrons que l'ensemble des points invariants par p est X**
La démonstration est assez simple :
$$M \text{ invariant par } p \iff M = p(M) \iff M \in X$$

Remarque 13 :

Ce n'est pas parce que l'endomorphisme $\overrightarrow{f}$ associé à une application affine f est une projection que f est une projection affine.

Exemple

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de direction $\overrightarrow{E}$, $X \subset \mathcal{E}$ un sous-espace affine de direction $\overrightarrow{X}$ et $\overrightarrow{Y}$ un supplémentaire de $\overrightarrow{X}$ dans $\overrightarrow{E}$.
Soit p le projecteur affine sur X parallèlement à $\overrightarrow{Y}$; soit $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{X}$, un vecteur non nul, et considérons $f = t_{\overrightarrow{u}} \circ p$ où $t_{\overrightarrow{u}}$ est la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$

1. f, composée d'applications affines est une application affine d'application linéaire associée $\overrightarrow{f} = \overrightarrow{t_{\overrightarrow{u}}} \circ \overrightarrow{p} = \mathrm{Id}_{\overrightarrow{E}} \circ \overrightarrow{p} = \overrightarrow{p}$.
C'est à dire que l'endomorphisme associé à f est la projection vectorielle $\overrightarrow{p}$ sur $\overrightarrow{X}$ parallèlement à $\overrightarrow{Y}$
2. Soit $M \in \mathcal{E}$; alors $f(M) = t_{\overrightarrow{u}} \circ p(M)$, et donc $\overrightarrow{p(M)f(M)} = \overrightarrow{u}$. Comme $p(M) \in X$, et que $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{X}$, nous avons $f(M) \in X$.
D'autre part, pour tout $M \in \mathcal{E}$, nous avons
$$\overrightarrow{Mf(M)} = \overrightarrow{Mp(M)} + \overrightarrow{p(M)f(M)} = \overrightarrow{Mp(M)} + \overrightarrow{u}$$
3. f n'admet pas de points invariants
Supposons que $M \in \mathcal{E}$ soit invariant par f, alors $M = f(M)$ et donc, nous avons $\overrightarrow{0} = \overrightarrow{Mp(M)} + \overrightarrow{u}$, c'est à dire $\overrightarrow{p(M)M} = \overrightarrow{u}$.
Par construction d'un projeté, nous avons $\overrightarrow{p(M)M} \in \overrightarrow{Y}$. Comme $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{X}$, que $\overrightarrow{X} \cap \overrightarrow{Y} = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$, l'égalité $\overrightarrow{p(M)M} = \overrightarrow{u}$ implique que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$. Il y a donc contradiction avec l'hypothèse où $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$
f n'admet donc pas de point invariant et n'est donc pas une projection affine

Nous pouvons donc avoir une application affine f dont l'application linéaire associée $\overrightarrow{f}$ est une projection vectorielle mais qui n'est pas une projection affine.

17.3.4 Théorème

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de direction $\overrightarrow{E}$.
Toute application affine $p : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ telle que $p^2 = p$ est une projection affine

Démonstration

1. Soit $\overrightarrow{p}$ l'application linéaire associée à p ; alors :
$$\overrightarrow{p \circ p} = \overrightarrow{p} \circ \overrightarrow{p} = \overrightarrow{p}$$
$\overrightarrow{p}$ est donc une projection vectorielle sur $\operatorname{Im}\overrightarrow{p}$ parallèlement à $\ker \overrightarrow{p}$
2. L'image de $\mathcal{E}$ est donc un sous-espace affine $p(\mathcal{E})$ de direction $\operatorname{Im}\overrightarrow{p}$ et $p(\mathcal{E})$ est entièrement déterminé par un point $A' = p(A) \in p(\mathcal{E})$ et $\operatorname{Im}\overrightarrow{p}$
3. Soit $M \in \mathcal{E}$ un point quelconque ; montrons que $\overrightarrow{Mp(M)} \in \ker \overrightarrow{p}$
$$\overrightarrow{p}\left(\overrightarrow{Mp(M)}\right) = \overrightarrow{p(M)p^2(M)} = \overrightarrow{p(M)p(M)} = \overrightarrow{0}$$
Donc, pour tout $M \in \mathcal{E}$, nous avons $\overrightarrow{Mp(M)} \in \ker \overrightarrow{p}$
4. D'après l'étude des projections vectorielles, nous avons $\overrightarrow{E} = \ker \overrightarrow{p} \oplus \operatorname{Im}\overrightarrow{p}$ et donc $\ker \overrightarrow{p} \cap \operatorname{Im}\overrightarrow{p} = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$
Ainsi, $p(M)$ est l'unique point d'intersection entre $p(\mathcal{E})$ et le sous-espace affine de direction $\ker \overrightarrow{p}$ passant par M
5. p est donc la projection sur $p(\mathcal{E})$ de direction $\ker \overrightarrow{p}$

17.3.5 Exercices résolus

Premier exercice

Soit $\mathcal{P}$ le plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$
Définir analytiquement la projection orthogonale sur la droite Δ d'équation $y - x - 1 = 0$

Soient $M = (x, y) \in \mathcal{P}$ et on appelle $M' = (x', y')$ l'image de M par la projection.

- ⋆ Nous avons $y' = x' + 1$
- ⋆ D'autre part, si $\overrightarrow{u}_\Delta$ est le vecteur directeur de Δ, nous avons $\overrightarrow{u}_\Delta = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ et $\left\langle \overrightarrow{u}_\Delta \mid \overrightarrow{Mp(M)} \right\rangle = 0$, d'où $(x' - x) + (y' - y) = 0$, c'est à dire $x' + y' = x + y$.
- ⋆ Nous avons alors $2x' + 1 = x + y$, c'est à dire $x' = \dfrac{x + y - 1}{2}$ et donc $y' = \dfrac{x + y + 1}{2}$.

La définition analytique de la projection orthogonale sur Δ est donc :
$$\begin{cases} x' = & \dfrac{x + y - 1}{2} \\ y' = & \dfrac{x + y + 1}{2} \end{cases}$$

Second exercice

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de dimension 3, de direction $\overrightarrow{E}$ et de repère cartésien $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$
On considère l'application affine $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ de définition analytique :
$$\begin{cases} x' = & -2y + z - 1 \\ y' = & -x - y + z - 1 \\ z' = & -2x - 4y + 3z - 2 \end{cases}$$

1. *Montrer que f est une projection et donner les éléments qui la caractérisent*
→ Premièrement, nous avons $f(O) = (-1, -1, -2)$
→ Si $\overrightarrow{f}$ est l'application linéaire associée à f, alors, sa matrice dans la base $\left\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right\}$ est donnée par :
$$\mathcal{M}_{\left\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right\}}\left(\overrightarrow{f}\right) = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -2 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

Par calcul matriciel, nous avons $\mathcal{M}_{\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}}\left(\vec{f}\right) \times \mathcal{M}_{\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}}\left(\vec{f}\right) = \mathcal{M}_{\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}}\left(\vec{f}\right)$, ce qui montre que $\vec{f}$ est une projection vectorielle

→ Mais, ce n'est parce que $\vec{f}$ est une projection vectorielle que f est une projection affine!!. Nous allons démontrer, par calculs, que f est une projection affine.
On appelle $M' = f(M)$ et $M'' = f(M')$ et nous posons $M = (x, y, z)$, $M' = (x', y', z')$ et $M'' = (x'', y'', z'')$. Nous avons alors :

$$\left\{\begin{array}{rl} x'' = & -2y' + z' - 1 \\ y'' = & -x' - y' + z' - 1 \\ z'' = & -2x' - 4y' + 3z' - 2 \end{array}\right.$$

$$\iff$$

$$\left\{\begin{array}{rl} x'' = & -2(-x-y+z-1) + (-2x-4y+3z-2) - 1 = -2y+z-1 \\ y'' = & -(-2y+z-1) - (-x-y+z-1) + (-2x-4y+3z-2) - 1 = -x-y+z-1 \\ z'' = & -2(-2y+z-1) - 4(-x-y+z-1) + 3(-2x-4y+3z-2) - 2 = -2x-4y+3z-2 \end{array}\right.$$

Nous avons donc $f^2(M) = f(M)$, donc $f \circ f = f$ et f est bien une projection

→ Il faut maintenant chercher les points invariants par f. Ce sont donc des points $M = (x, y, z)$ qui vérifient $M = f(M)$, ce qui donne, en termes de coordonnées :

$$\left\{\begin{array}{rl} x = & -2y+z-1 \\ y = & -x-y+z-1 \\ z = & -2x-4y+3z-2 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rl} x+2y-z = & -1 \\ x+2y-z = & -1 \\ 2x+4y-2z = & -2 \end{array}\right. \iff x+2y-z+1=0$$

C'est à dire que le plan $\mathcal{P}$ d'équation $x + 2y - z + 1 = 0$ est l'ensemble des points fixes de f

→ La direction de cette projection est donnée par le noyau de $\vec{f}$. On trouve ce noyau en résolvant le système :

$$\left\{\begin{array}{rl} -2y+z = & 0 \\ -x-y+z = & 0 \\ -2x-4y+3z = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rl} -2y+z = & 0 \\ -x-y+z = & 0 \end{array}\right.$$

Le noyau de $\vec{f}$ est donc la droite vectorielle d'équation $\left\{\begin{array}{rl} -2y+z = & 0 \\ -x-y+z = & 0 \end{array}\right.$ et de vecteur directeur $\vec{u} = \begin{pmatrix} +1 \\ +1 \\ +2 \end{pmatrix}$

Ainsi, f est une projection sur le plan d'équation $x + 2y - z + 1 = 0$ et de direction le vecteur $\vec{u} = \begin{pmatrix} +1 \\ +1 \\ +2 \end{pmatrix}$

2. *Quelle est l'image de la droite $\Delta \subset \mathcal{E}$ d'équations : $\dfrac{x-1}{-1} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z-3}{4}$*

Un point de Δ est donné par : $A = (1, 0, 3)$, et cette droite a pour vecteur directeur $\vec{u}_\Delta = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

L'image $A' = f(A)$ de A est $A' = (2, 1, 5)$; L'image du vecteur directeur $\vec{u}_\Delta$ est donnée par $\vec{f}(\vec{u}_\Delta) = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$

Donc l'image de Δ est une droite vectorielle passant par $A' = (2, 1, 5)$ et de vecteur directeur $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$

3. *Trouver l'image par f du plan $\mathcal{P} \subset \mathcal{E}$ d'équation $x + y - z + 5 = 0$*

→ Un point de $\mathcal{P}$ est le point $A = (0, 0, 5)$ et des vecteurs directeurs de $\mathcal{P}$ sont $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

→ L'image de $\mathcal{P}$ par f passe par l'imge $A' = f(A)$ de A et a pour vecteurs directeurs $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{u})$ et $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{v})$

Or $A' = (4, 4, 13)$ et $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{u}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{v}) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

Nous remarquons que $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{u}) = -\overrightarrow{f}(\overrightarrow{v})$, c'est à dire que $f(\mathcal{P})$ est une droite passant par $A' = (4, 4, 13)$ et de vecteur directeur $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

17.3.6 Exercices

Exercice 13 :

Le plan affine $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère cartésien $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$. On considère l'application $f : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}$ de définition analytique :

$$\begin{cases} x' = & \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}y + \frac{2}{3} \\ y' = & -\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y + \frac{2}{3} \end{cases}$$

1. Montrer que f est une application affine non bijective. Déterminer l'ensemble D de ses points invariants.
2. Soit $M' = (a', b')$. Trouver tous les antécédents de M' par f
3. Caractériser l'application f et en reconnaître ses éléments

Exercice 14 :

1. $\mathcal{P}$ est le plan affine euclidien. Définir analytiquement la projection orthogonale sur la droite (Δ) d'équation $2x - y + 2 = 0$
2. $\mathcal{E}$ est l'espace affine euclidien de dimension 3. Définir analytiquement la projection orthogonale sur le plan (P) d'équation $2x - y + z - 1 = 0$

Exercice 15 :

Dans l'espace affine $\mathcal{E}$ de dimension 3, définir la projection p sur le plan d'équation $x + y + z - 1 = 0$ parallèlement à la droite de vecteur directeur $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Exercice 16 :

Le plan affine $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère cartésien $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$. On considère l'application affine $f : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}$ de définition analytique :

$$\begin{cases} x' = & \frac{1}{3}(4x + 2y - 1) \\ y' = & \frac{1}{3}(-2x - y + 2) \end{cases}$$

Quelle est la nature de f ? Donner les éléments qui la caractérisent

Exercice 17 :

Le plan affine $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère cartésien $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$. Nous considérons les droites D et D' d'équations respectives :

$$D : x - y + 2 = 0 \qquad D' : 2x + 3y - 1 = 0$$

Séfinir analytiquement la projection p sur D parallèlement à D', et la projection q sur D' parallèlement à D

Exercice 18 :

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de dimension 3, de direction $\overrightarrow{E}$ et de repère cartésien $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$
On considère l'application affine $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ de définition analytique :

$$\left\{\begin{array}{rl} x' = & -x - 2y + 2z - 2 \\ y' = & -x + z - 1 \\ z' = & -2x - 2y + 3z - 2 \end{array}\right.$$

1. Quelle est la nuture de f ? Donner les éléments qui la caractérisent.
2. Quelle est l'image de la droite de représentation paramétrique :

$$\left\{\begin{array}{rl} x = & 1 + 2\lambda \\ y = & 2 + 3\lambda \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{R} \\ z = & 3 + 2\lambda \end{array}\right.$$

3. Quelle est l'image de la droite d'équation $\dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y}{4} = \dfrac{z+1}{2}$
4. Quelle est l'image du plan d'équation $x - 4y + z + 1 = 0$

Exercice 19 :

Le plan affine $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère cartésien $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$. On considère l'application affine f : $\mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}$ de définition analytique :

$$\left\{\begin{array}{rl} x' = & 8x - 4y - 2 \\ y' = & 8x - 4y - 1 \end{array}\right.$$

1. On apple $\overrightarrow{f}$ l' application linéaire associée à f. Donner $\ker \overrightarrow{f}$
2. Montrer qu'il existe un unique point invariant par f. On appelle I ce point invariant.
3. Montrer que l'image par f de $\mathcal{P}$ est une droite (D) que nous déterminerons.
4. Définir analytiquement la projection p sur (D) parallèlement à $\ker \overrightarrow{f}$.
5. Démontrer que $f = H \circ p = p \circ H$ où H est une homothétie de centre I et de rapport à calculer.

17.3.7 Définition

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de direction $\overrightarrow{E}$.
Soient $X \subset \mathcal{E}$ un sous-espace affine de $\mathcal{E}$ de direction $\overrightarrow{X}$. Soit $\overrightarrow{Y}$ un sous-espace vectoriel supplémentaire de $\overrightarrow{X}$ dans $\overrightarrow{E}$,
Soit p la projection affine sur X de direction $\overrightarrow{Y}$
On appelle symétrie par rapport à X et parallèlement à $\overrightarrow{Y}$ une application s ainsi définie :

$$\left\{\begin{array}{ccc} s : \mathcal{E} & \longrightarrow & \mathcal{E} \\ M & \longmapsto & M' = s(M) \end{array}\right.$$

Telle que $p(M)$ soit le milieu du segment $[Ms(M)]$; autrement dit $\overrightarrow{Mp(M)} = \overrightarrow{p(M)s(M)}$

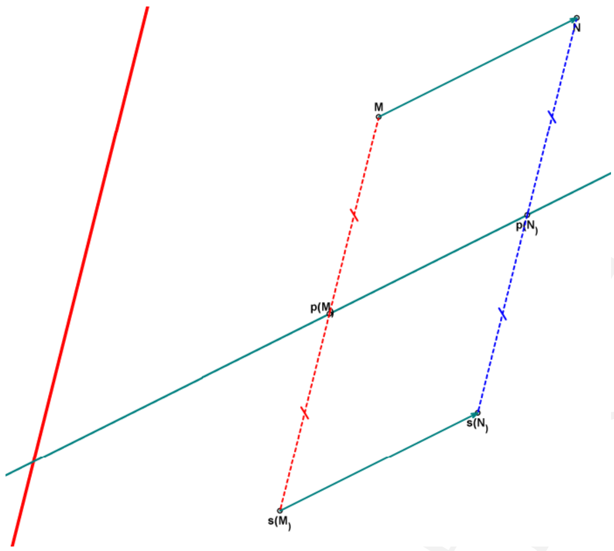

FIGURE 17.10 – Visualisation d'une symétrie

Remarque 14 :

1. Une autre manière d'écrire la relation entre $s(M)$ et $p(M)$:

$$\overrightarrow{Mp(M)} = \overrightarrow{p(M)s(M)}$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$(\forall O \in \mathcal{E})\left(\overrightarrow{Op(M)} - \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{Os(M)} - \overrightarrow{Op(M)}\right)$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$(\forall O \in \mathcal{E})\left(2\overrightarrow{Op(M)} = \overrightarrow{Os(M)} + \overrightarrow{OM}\right)$$

2. En reprenant le calcul barycentrique, on peut dire que $s(M)$ est le barycentre du système pondéré $\{(p(M), 2); (M, -1)\}$
3. Il faut remarquer que, pour tout $M \in \mathcal{E}$, $p(s(M)) = p(M)$
4. Il y a une symétrie particulière qui est très importante : la symétrie orthogonale dans les espaces affines euclidiens.

   Soit $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien de direction $\overrightarrow{E}$.
   Soient $X \subset \mathcal{E}$ un sous-espace affine de $\mathcal{E}$ de direction $\overrightarrow{X}$.
   Nous appelons symétrie orthogonale sur X , toute symétrie affine par rapport à X de direction $\overrightarrow{X}^{\perp}$
   Nous avons alors $\overrightarrow{Ms(M)} \in \overrightarrow{X}^{\perp}$

17.3.8 Proposition

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de direction $\overrightarrow{E}$.
Soient $X \subset \mathcal{E}$ un sous-espace affine de $\mathcal{E}$ de direction $\overrightarrow{X}$. Soit $\overrightarrow{Y}$ un sous-espace vectoriel supplémentaire de $\overrightarrow{X}$ dans $\overrightarrow{E}$,
Soit s la symétrie par rapport à X et parallèlement à $\overrightarrow{Y}$; alors :

1. **s est une application affine et l'endomorphisme associé $\overrightarrow{s}$ est la symétrie vectorielle σ par rapport à $\overrightarrow{X}$ et parallèlement à $\overrightarrow{Y}$**
2. **L'ensemble des points invariants est X**
3. **s est une involution, c'est à dire que $s \circ s = \mathrm{Id}_{\mathcal{E}}$**

Démonstration

1. On montre que s est une application affine
   Nous allons proposer 2 démonstrations du résultat
   → La première méthode consiste à utiliser la relation de Chasles, habituelle et assez simple. Soient $M \in \mathcal{E}$ et $N \in \mathcal{E}$.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{s(M)\,s(N)} &= \overrightarrow{s(M)\,p(M)} + \overrightarrow{p(M)\,p(N)} + \overrightarrow{p(N)\,s(N)} \\
&= \overrightarrow{p(M)\,M} + \overrightarrow{p(M)\,p(N)} + \overrightarrow{Np(N)} \\
&= \overrightarrow{p(M)\,M} + \overrightarrow{p(M)\,p(N)} + \underbrace{\overrightarrow{NM} + \overrightarrow{Mp(M)} + \overrightarrow{p(M)\,p(N)}}_{\overrightarrow{Np(N)}} \\
&= \overrightarrow{p(M)\,p(N)} + \overrightarrow{p(M)\,p(N)} + \overrightarrow{NM} \\
&= 2\overrightarrow{p(M)\,p(N)} - \overrightarrow{MN} \\
&= 2\varpi\left(\overrightarrow{MN}\right) - \mathrm{Id}_{\overrightarrow{E}}\left(\overrightarrow{MN}\right) \\
&= \left(2\varpi - \mathrm{Id}_{\overrightarrow{E}}\right)\left(\overrightarrow{MN}\right)
\end{aligned}$$

   Où nous avons ϖ qui est la projection vectorielle sur $\overrightarrow{X}$ parallèlement à $\overrightarrow{Y}$.
   Nous savons aussi que si σ est la symétrie vectorielle par rapport à $\overrightarrow{X}$ parallèlement à $\overrightarrow{Y}$, alors $\sigma = 2\varpi - \mathrm{Id}_{\overrightarrow{E}}$ et donc nous avons $\overrightarrow{s(M)\,s(N)} = \left(2\varpi - \mathrm{Id}_{\overrightarrow{E}}\right)\left(\overrightarrow{MN}\right) = \sigma\left(\overrightarrow{MN}\right)$ Ce qui montre que s est affine et d'application linéaire associée σ
   → La seconde méthode consiste à utiliser le fait que $s(M)$ est le barycentre du système pondéré $\{(p(M), 2); (M, -1)\}$.
   Soient $M \in \mathcal{E}$ et $N \in \mathcal{E}$. Alors, pour tout $O \in \mathcal{E}$, nous avons :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{s(M)\,s(N)} = \overrightarrow{Os(N)} - \overrightarrow{Os(M)} &= \left(2\overrightarrow{Op(N)} - \overrightarrow{ON}\right) - \left(2\overrightarrow{Op(M)} - \overrightarrow{OM}\right) \\
&= 2\overrightarrow{p(M)\,p(N)} - \overrightarrow{MN} \\
&= 2\varpi\left(\overrightarrow{MN}\right) - \mathrm{Id}_{\overrightarrow{E}}\left(\overrightarrow{MN}\right) \\
&= \left(2\varpi - \mathrm{Id}_{\overrightarrow{E}}\right)\left(\overrightarrow{MN}\right)
\end{aligned}$$

   Et nous concluons comme pour la première démonstration
2. L'ensemble des points invariants est X
   Soit $M \in \mathcal{E}$; alors, pour tout point $O \in \mathcal{E}$, nous avons $2\overrightarrow{Op(M)} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{Os(M)}$. Alors, M invariant peut être écrit :

$$M = s(M) \Longleftrightarrow 2\overrightarrow{Op(M)} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM} \Longleftrightarrow M = p(M) \Longleftrightarrow M \in X$$

3. On démontre que s est une involution
   Soient $M \in \mathcal{E}$ et $A \in X$.
   Nous savons que $s(A) = A$ et donc $\overrightarrow{As(M)} = \overrightarrow{s(A)\,s(M)} = \sigma\left(\overrightarrow{AM}\right)$.
   De même,

$$\overrightarrow{As[s(M)]} = \overrightarrow{s(A)\,s[s(M)]} = \sigma\left(\overrightarrow{As(M)}\right) = \sigma\left[\sigma\left(\overrightarrow{AM}\right)\right] = \sigma \circ \sigma\left(\overrightarrow{AM}\right) = \mathrm{Id}_{\overrightarrow{E}}\left(\overrightarrow{AM}\right) = \overrightarrow{AM}$$

   parce que σ est une symétrie vectorielle donc involutive.
   D'où, pour tout $M \in \mathcal{E}$, nous avons $\overrightarrow{As[s(M)]} = \overrightarrow{AM}$, c'est à dire $s[s(M)] = M$, et donc $s \circ s = \mathrm{Id}_E$ et s est une involution affine.

17.3.9 Théorème

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de direction $\overrightarrow{E}$.
Soit f une application affine de $\mathcal{E}$ involutive, c'est à dire telle que $f \circ f = \mathrm{Id}_{\mathcal{E}}$. Alors, f est une symétrie affine

Démonstration

1. Soit f une application affine de $\mathcal{E}$ involutive. On appelle $\overrightarrow{f}$ l'application linéaire associée. Alors, comme $f\circ f=\mathrm{Id}_{\mathcal{E}}$, nous avons :
$$\overrightarrow{f\circ f}=\overrightarrow{f}\circ\overrightarrow{f}=\mathrm{Id}_{\overrightarrow{E}}$$
Ce qui signifie que $\overrightarrow{f}$ est une symétrie vectorielle par rapport à un sous-espace vectoriel $\overrightarrow{X}$ parallèlement à un autre sous-espace vectoriel $\overrightarrow{Y}$ tels que $\overrightarrow{X}\oplus\overrightarrow{Y}=\overrightarrow{E}$
Ainsi, pour tout vecteur $\overrightarrow{u}\in\overrightarrow{X}$, $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{u})=\overrightarrow{u}$ et pour tout $\overrightarrow{v}\in\overrightarrow{Y}$, $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{v})=-\overrightarrow{v}$
2. Soit $\mathcal{F}\subset\mathcal{E}$, l'ensemble des points fixes de f. Si $\mathcal{F}\neq\emptyset$, alors, $\mathcal{F}$ a pour direction $\overrightarrow{X}$
3. Nous avons $\mathcal{F}\neq\emptyset$.
En effet, pour tout $M\in\mathcal{E}$, le milieu I du segment $[M;s(M)]$ est invariant ; s étant affine conserve les barycentres et donc les milieux, c'est à dire que $s(I)$ est le milieu du segement $\left[s(M);s^2(M)\right]$. Comme s est involutive, $s(I)$ est le milieu du segement $[s(M);M]$, c'est à dire que $s(I)=I$ et donc $I\in\mathcal{F}$
4. Maintenant, pour tout $M\in\mathcal{E}$
$$\sigma\left(\overrightarrow{Ms(M)}\right)=\overrightarrow{s(M)s^2(M)}=\overrightarrow{s(M)M}=-\overrightarrow{Ms(M)}$$
ce qui signifie que $\overrightarrow{Ms(M)}\in\overrightarrow{Y}$

s est donc une symétrie par rapport à $\mathcal{F}$ parallèlement à $\overrightarrow{Y}$

Remarque 15 :

1. Si s est une symétrie par rapport à $\mathcal{F}$ parallèlement à $\overrightarrow{Y}$, et pour définir analytiquement s, il faut utiliser le fait que, pour tout point $M\in\mathcal{E}$:
   - ⋆ Le milieu du segment $[M;s(M)]$ est dans $\mathcal{F}$
   - ⋆ Le vecteur $\overrightarrow{Ms(M)}\in\overrightarrow{Y}$
2. Pour l'espace affine $\mathcal{E}$ de direction $\overrightarrow{E}$, nous avons $\overrightarrow{E}$ et $\left\{\overrightarrow{0}\right\}$ qui sont 2 sous-espaces vectoriels supplémentaires.
   - ⋆ La symétrie par rapport à $\mathcal{E}$ et de direction $\left\{\overrightarrow{0}\right\}$ est l'application identique $\mathrm{Id}_{\mathcal{E}}$
   - ⋆ Pour tout point $A\in\mathcal{E}$ la symétrie par rapport à $\{A\}$ de direction $\overrightarrow{E}$ est la symétrie centrale de centre A *(ou bien l'homothétie $h_{A,-1}$ de centre A et de rapport -1)*

17.3.10 Exercices corrigés

1. *$\mathcal{E}$ est un espace affine de dimension 3 de $\mathbb{R}$-espace vectoriel associé $\overrightarrow{E}$*
   - ⋆ *(P) est le plan affine d'équation $x-2y+z+2=0$*
   - ⋆ *(D) est une droite affine passant par $A=(1,0-1)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$*

   (a) *Définir analytiquement la symétrie par rapport à (P) et parallèlement à (D)*
   Nous allons appeler S_P la symétrie par rapport à (P).
   Soit $M=(x,y,z)\in\mathcal{E}$. Nous appelons $S_P(M)=(x',y',z')$ l'image de M par S_P et I le milieu du segement $[M;S_P(M)]$.
   Les coordonnées de I sont donc $I=\left(\dfrac{x+x'}{2},\dfrac{y+y'}{2},\dfrac{z+z'}{2}\right)$
   → Premièrement, $I\in(P)$; les coordonnées de I vérifient donc :
$$\frac{x+x'}{2}-2\times\frac{y+y'}{2}+\frac{z+z'}{2}+2=0\iff(x+x')-2(y+y')+(z+z')+4=0$$

→ En second lieu, le vecteur $\overrightarrow{MS_P(M)}$ est colinéaire au vecteur $\overrightarrow{u}$, c'est à dire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{MS_P(M)} = \lambda \overrightarrow{u}$.
Ce qui donne, au niveau des coordonnées :

$$\left\{\begin{array}{rl} x'-x= & \lambda \\ y'-y= & 0 \\ z'-z= & \lambda \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rl} x'= & x+\lambda \\ y'= & y \\ z'= & z+\lambda \end{array}\right.$$

→ Nous remplaçons, maintenant x',y' et z' dans l'équation du plan :

$$(x+x')-2(y+y')+(z+z')+4=0 \Longleftrightarrow (x+x+\lambda)-2(y+y)+(z+z+\lambda)+4=0 \Longleftrightarrow \lambda=-x+2y-z-2$$

D'où nous obtenons la définition analytique de S_P :

$$\left\{\begin{array}{rl} x'= & x+\lambda = x+(-x+2y-z-2) \\ y'= & y \\ z'= & z+\lambda = z+(-x+2y-z-2) \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rl} x'= & 2y-z-2 \\ y'= & y \\ z'= & -x+2y-2 \end{array}\right.$$

(b) *Définir analytiquement la symétrie par rapport à (D) et parallèlement à (P)*

Nous allons, bien entendu, utiliser la même méthode (le même algorithme) que ci-dessus ; même méthode ? ? ? Pas vraiment...même esprit, oui ! !

Nous allons appeler S_D la symétrie par rapport à (D).
Soit $M=(x,y,z)\in\mathcal{E}$. Nous appelons $S_D(M)=(x',y',z')$ l'image de M par S_D et I le milieu du segement $[M;S_D(M)]$.
Les coordonnées de I sont donc $I=\left(\dfrac{x+x'}{2},\dfrac{y+y'}{2},\dfrac{z+z'}{2}\right)$

→ Premièrement, $I\in(D)$ et comme $A\in(D)$, le vecteur $\overrightarrow{AI}$ est colinéaire au vecteur $\overrightarrow{u}$, c'est à dire qu'il existe $\lambda\in\mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AI}=\lambda\overrightarrow{u}$.

Les coordonnées de $\overrightarrow{AI}$ sont : $\overrightarrow{AI}=\begin{pmatrix} \dfrac{x+x'}{2}-1 \\ \dfrac{y+y'}{2} \\ \dfrac{z+z'}{2}+1 \end{pmatrix}$

Et nous avons donc :

$$\left\{\begin{array}{rl} \dfrac{x+x'}{2}-1= & \lambda \\ \dfrac{y+y'}{2} & 0 \\ \dfrac{z+z'}{2}+1= & \lambda \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rl} x'= & -x+2\lambda+2 \\ y'= & -y \\ z'= & -z+2\lambda-2 \end{array}\right.$$

→ En second lieu, le vecteur $\overrightarrow{MS_D(M)}$ appartient à $\overrightarrow{P}$, plan directeur de (P) d'équation cartésienne $x-2y+z=0$

Les coordonnées de $\overrightarrow{MS_D(M)}$ sont $\begin{pmatrix} x'-x \\ y'-y \\ z'-z \end{pmatrix}$ et vérifient l'équation cartésienne de (P), c'est à dire que :

$$\begin{gathered} (x'-x)-2(y'-y)+(z'-z)=0 \\ \Longleftrightarrow \\ ((-x+2\lambda+2)-x)-2(-y-y)+((-z+2\lambda-2)-z)=0 \\ \Longleftrightarrow \\ -x+\lambda+2y-z+\lambda=0 \\ \Longleftrightarrow \\ 2\lambda=x-2y+z \end{gathered}$$

D'où nous obtenons la définition analytique de S_D :

$$\left\{\begin{array}{ll} x' = & -x+2\lambda+2 \\ y' = & -y \\ z' = & -z+2\lambda-2 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} x' = & -x+x-2y+z+2 \\ y' = & -y \\ z' = & -z+x-2y+z-2 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} x' = & -2y+z+2 \\ y' = & -y \\ z' = & x-2y-2 \end{array}\right.$$

2. *Dans le plan affine euclidien $\mathcal{P}$, définir analytiquement la symétrie orthogonale s par rapport à la droite (D) d'équation $x-y=0$*

   Pour tout point $M=(x,y)\in\mathcal{P}$, nous notons $M'=s(M)=(x',y')$ le symétrique de M dans la symétrie orthogonale par rapport à (D)

   → Appelons I le milieu du segment $[M;M']$. I a pour coordonnées $I=\left(\dfrac{x+x'}{2};\dfrac{y+y'}{2}\right)$, et comme $I\in(D)$, les coordonnées de I vérifient l'équation de la droite (D) et nous avons une première équation :
   $$\frac{x+x'}{2}-\left(\frac{y+y'}{2}\right)=0 \Longleftrightarrow x'-y'=-x+y$$

   → D'autre part, le vecteur $\overrightarrow{Ms(M)}$ est orthogonal à la direction de (D). Si $\overrightarrow{u}_D$ est le vecteur directeur de (D), nous avons $\left\langle \overrightarrow{Ms(M)} \mid \overrightarrow{u}_D\right\rangle=0$.

   Or $\overrightarrow{u}_D=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{Ms(M)}=\begin{pmatrix}x'-x\\y'-y\end{pmatrix}$. Nous obtenons donc une seconde équation :
   $$\left\langle \overrightarrow{Ms(M)} \mid \overrightarrow{u}_D\right\rangle=0 \Longleftrightarrow (x'-x)+(y'-y)=0 \Longleftrightarrow x'+y'=x+y$$

   → Nous devons donc résoudre le système :
   $$\left\{\begin{array}{ll} x'-y' = & -x+y \\ x'+y' = & x+y \end{array}\right.$$

   D'où nous tirons : $x'=y$ et $y'=x$

   La définition analytique de s est donc :
   $$\left\{\begin{array}{ll} x' = & y \\ y' = & x \end{array}\right. \text{ et la matrice de l'application linéaire associée } \overrightarrow{s} \text{ est } \mathcal{M}\left(\overrightarrow{s}\right)=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$$

17.3.11 Quelques exercices à résoudre sur les symétries

Exercice 20 :

On considère le plan affine $\mathcal{P}$ muni d'un repère affine $\mathcal{R}(\{A;B;C\})$. Caractériser l'application affine S telle que $S(A)=A$, $S(B)=C$ et $S(C)=B$

Exercice 21 :

On considère le plan affine $\mathcal{P}$ muni d'un repère cartésien $\mathcal{R}\left(O,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right)$. Soit f l'application de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ définie analytiquement par :
$$\left\{\begin{array}{ll} x' = & \frac{1}{3}(-x-2y+2) \\ y' = & \frac{1}{3}(-4x+y+2) \end{array}\right.$$
Donner la nature de f et les éléments qui la caractérisent.

Exercice 22 :

1. Le plan affine euclidien $\mathcal{P}$ est repéré par le repère cartésien $\mathcal{R}\left(O,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right)$ où $\left\{\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right\}$ est une base orthonormée de $\overrightarrow{P}$, plan directeur de $\mathcal{P}$.

   Définir analytiquement la symétrie orthogonale par rapport à la droite (Δ) d'équation $x+2y-1=0$

2. L'espace affine euclidien $\mathcal{E}$ de dimension 3 est repéré par le repère cartésien $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ où $\left\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right\}$ est une base orthonormée de $\overrightarrow{E}$, espace directeur de $\mathcal{E}$.
   Définir analytiquement la symétrie orthogonale par rapport au plan (P) d'équation $x - y - z = 1$

Exercice 23 :

On considère le plan affine $\mathcal{P}$ muni d'un repère cartésien $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$. Soient D et D' les droites d'équations respectives :

$$\begin{array}{ll} D: & x + y - 1 = 0 \\ D': & 2x - y + 2 = 0 \end{array}$$

Définir analytiquement la symétrie S_D par rapport à D parallèlement à D' et $S_{D'}$ la symétrie par rapport à D' et prallèlement à D

Exercice 24 :

On considère l'espace affine $\mathcal{E}$ de dimension 3 muni d'un repère cartésien $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$. Soit f l'application de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ définie analytiquement par :

$$\left\{\begin{array}{ll} x' = & 3x - 4z - 4 \\ y' = & 2x - y - 2z - 2 \\ z' = & 2x - 3z - 4 \end{array}\right.$$

1. Donner la nature de f et les éléments qui la caractérisent.
2. Quelle est l'image de la droite passant par $A(1, 0, 2)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$
3. Quelle est l'image du plan d'équation $x - z + 2 = 0$

17.3.12 Définition d'affinité

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de direction $\overrightarrow{E}$.
Soient $X \subset \mathcal{E}$ un sous-espace affine de $\mathcal{E}$ de direction $\overrightarrow{X}$. Soit $\overrightarrow{Y}$ un sous-espace vectoriel supplémentaire de $\overrightarrow{X}$ dans $\overrightarrow{E}$,
Soit p la projection affine sur X de direction $\overrightarrow{Y}$
On appelle affinité par rapport à X (ou de base X), parallèlement à $\overrightarrow{Y}$ et de rapport $k \in \mathbb{R}$ une application f ainsi définie :

$$\left\{\begin{array}{rcl} f : \mathcal{E} & \longrightarrow & \mathcal{E} \\ M & \longmapsto & M' = f(M) \end{array}\right.$$

Telle que si $p(M)$ est la projection de M sur X, parallèlement à $\overrightarrow{Y}$, nous avons $\overrightarrow{p(M)M'} = k\overrightarrow{p(M)M}$

Remarque 16 :

Symétries, projections sont des affinités. En effet :

1. Si $k = 1$, nous avons $\overrightarrow{p(M)M'} = \overrightarrow{p(M)M}$, c'est à dire $M = M'$; donc, si $k = 1$, nous avons $f = \mathrm{Id}_{\mathcal{E}}$
2. Si $k = 0$, nous avons $\overrightarrow{p(M)M'} = \overrightarrow{0}$, c'est à dire $p(M) = M'$; donc, si $k = 0$, nous avons f est la projection sur X parallèlement à $\overrightarrow{Y}$
3. Si $k = -1$, nous avons $\overrightarrow{p(M)M'} = -\overrightarrow{p(M)M}$; $p(M)$ est donc le milieu du segement $[M; M']$; donc, f est la symétrie par rapport à X parallèlement à $\overrightarrow{Y}$
4. Il y a une affinité particulière qui est très importante : l'affinité orthogonale dans les espaces affines euclidiens.

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien de direction $\overrightarrow{E}$.
Soient $X \subset \mathcal{E}$ un sous-espace affine de $\mathcal{E}$ de direction $\overrightarrow{X}$.
Nous appelons affinité orthogonale de base X et de rapport $k \in \mathbb{R}$, toute affinité de base X et de rapport $k \in \mathbb{R}$ et de direction $\overrightarrow{X}^{\perp}$

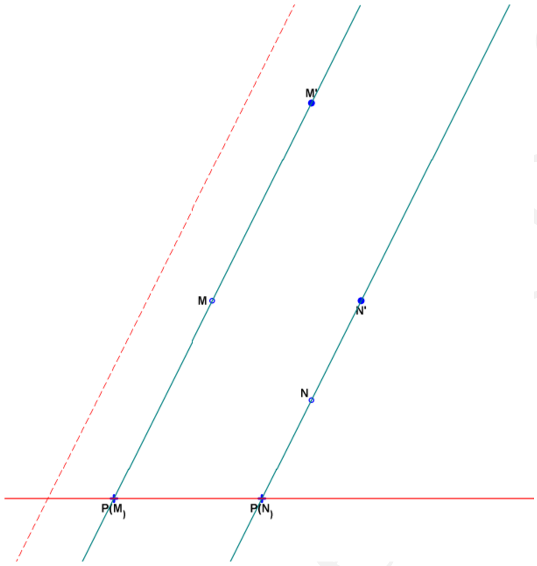

FIGURE 17.11 – Visualisation d'une affinité de direction quelconque

17.3.13 Propriétés des affinités

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de direction $\overrightarrow{E}$.
Soient $X \subset \mathcal{E}$ un sous-espace affine de $\mathcal{E}$ de direction $\overrightarrow{X}$. Soit $\overrightarrow{Y}$ un sous-espace vectoriel supplémentaire de $\overrightarrow{X}$ dans $\overrightarrow{E}$,
Soit f l'affinité par rapport à X (ou de base X), parallèlement à $\overrightarrow{Y}$ et de rapport $k \in \mathbb{R}$

1. **Une affinité f est une application affine d'application linéaire associée $\overrightarrow{f} = (1-k)\varpi + \mathrm{Id}_{\overrightarrow{E}}$ où ϖ est la projection vectorielle sur $\overrightarrow{X}$ parallèlement à $\overrightarrow{Y}$**
2. **Si $k \neq +1$, l'ensemble des points invariants par f est X**

Démonstration

1. On démontre qu'une affinité est une application affine

   Soit f l'affinité par rapport à X (ou de base X), parallèlement à $\overrightarrow{Y}$ et de rapport $k \in \mathbb{R}$
   Soient $M \in \mathcal{E}$ et $N \in \mathcal{E}$; nous appelons $M' = f(M)$ et $N' = f(N)$. Alors :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{M'N'} &= \overrightarrow{M'p(M)} + \overrightarrow{p(M)p(N)} + \overrightarrow{p(N)N'} \\
&= -k\overrightarrow{p(M)M} + \overrightarrow{p(M)p(N)} + k\overrightarrow{p(N)N} \\
&= \overrightarrow{p(M)p(N)} - k\left(\overrightarrow{p(M)N} + \overrightarrow{NM}\right) + k\overrightarrow{p(N)N} \\
&= \overrightarrow{p(M)p(N)} - k\overrightarrow{NM} - k\overrightarrow{p(M)N} + k\overrightarrow{p(N)N} \\
&= \overrightarrow{p(M)p(N)} - k\overrightarrow{NM} + k\left(\overrightarrow{Np(M)} + \overrightarrow{p(N)N}\right) \\
&= (1-k)\overrightarrow{p(M)p(N)} + k\overrightarrow{MN} \\
&= (1-k)\varpi\left(\overrightarrow{MN}\right) + k\mathrm{Id}_{\overrightarrow{E}}\left(\overrightarrow{MN}\right) \\
&= \left((1-k)\varpi + k\mathrm{Id}_{\overrightarrow{E}}\right)\left(\overrightarrow{MN}\right)
\end{aligned}$$

Donc f est une application affine d'application linéaire associée $\overrightarrow{f} = (1-k)\,\varpi + k\mathrm{Id}_{\overrightarrow{E}}$

2. On montre que l'ensemble des points invariants par f est X

   Soit f l'affinité par rapport à X (ou de base X), parallèlement à $\overrightarrow{Y}$ et de rapport $k \in \mathbb{R}$
   Soit $M \in \mathcal{E}$ invariant par f, c'est à dire tel que $f(M) = M$. Alors :

   $$\overrightarrow{p(M)\,M} = k\overrightarrow{p(M)\,M} \iff (1-k)\,\overrightarrow{p(M)\,M} = \overrightarrow{0}$$

   Ainsi, si $k \neq 1$, $\overrightarrow{p(M)\,M} = \overrightarrow{0}$ et donc $p(M) = M$, c'est à dire que $M \in X$

Remarque 17 :

Evidemment, si $k = 1$, alors $f = \mathrm{Id}_{\mathcal{E}}$ et l'ensemble des points invariants est $\mathcal{E}$ en entier.

Exercice 25 :

On considère le plan affine $\mathcal{P}$ muni d'un repère cartésien $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.

1. Donner la définition analytique de l'affinité de base la droite $\left(O, \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}\right)$, parallèlement à $\overrightarrow{j}$ et de rapport 2
2. Donner la définition analytique de l'affinité de base la droite d'équation $x + y = 0$, d'axe la droite d'équation $x - y = 0$ et de rapport $\dfrac{3}{2}$

Exercice 26 :

Le plan affine euclidien $\mathcal{P}$ est rapporté à une base orthonormée $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$

1. f est une affinité orthogonale de base la droite $\left(O, \overrightarrow{i}\right)$ et de rapport 2.
   (a) $\mathcal{C}$ est le cercle de centre O et de rayon 1. Construire l'image de $\mathcal{C}$ par f. On appelle $\mathfrak{E}$ cette image
   (b) Donner une définition analytique de f et en déduire une équation de $\mathfrak{E}$
2. f_1 est une affinité orthogonale de base la droite (D) d'équation $x + y = 0$ et de rapport $\dfrac{3}{2}$
   (a) $\mathcal{C}$ est le cercle de centre O et de rayon 1. Construire l'image de $\mathcal{C}$ par f_1. On appelle $\mathfrak{E}_1$ cette image
   (b) Donner une définition analytique de f_1 et en déduire une équation de $\mathfrak{E}_1$