17.4 Exercices complémentaires

17.4.1 Sur les applications affines

Exercice 24 :

On considère le plan affine $\mathcal{P}$ muni d'un repère cartésien $\mathcal{R}\left(\left\{O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right\}\right)$. Soient les points

$$A = (1, 1) \quad B = (0, 2) \quad C = (-1, 2) \quad A' = (3, 4) \quad B' = (1, -1) \quad C' = (0, 3)$$

1. Montrer qu'il existe une application affine f telle que $f(A) = A'$, $f(B) = B'$ et $f(C) = C'$
2. Donner la définition analytique de f

Exercice 25 :

On considère l'espace affine $\mathcal{E}$ de dimension 3. Soient trois points $A \in \mathcal{E}$, $B \in \mathcal{E}$ et $C \in \mathcal{E}$ **non alignés**. Soit $\mathcal{F}$ la famille d'applications affines de $\mathcal{E}$ telles que $f(A) = B$, $f(B) = A$ et $f(C) = C$

1. Soit I le milieu du segement $[A; B]$. Démontrer que la droite (IC) est invariante point par point.
2. Démontrer que la droite (AB) est globalement invariante
3. En choisissant le repère cartésien $\mathcal{R}\left(\left\{I, \overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IC}, \overrightarrow{w}\right\}\right)$ où $\overrightarrow{w}$ est un vecteur n'appartenant pas au plan vectoriel engendré par $\left\{\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IC}\right\}$, déterminer analytiquement un élément quelconque $f \in \mathcal{F}$

Exercice 26 :

On considère un espace affine $\mathcal{E}$ associé au $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\overrightarrow{E}$. Soit f une application affine de $\mathcal{E}$

1. Démontrer que la relation $\mathcal{R}$ définie par :

$$(\forall A \in \mathcal{E})(\forall B \in \mathcal{E})((A\mathcal{R}B) \Longleftrightarrow (f(A) = f(B)))$$

   est une relation d'équivalence
2. Démontrer que toutes les classes d'équivalence sont des sous-espaces affines de $\mathcal{E}$ parallèles de direction $\ker \overrightarrow{f}$ où $\overrightarrow{f}$ est l'application linéaire associée à f

Exercice 27 :

On appelle **enveloppe convexe** d'une famille finie de points $\{A_i \text{ avec } 1 \leqslant i \leqslant n\}$, l'ensemble des barycentes de la famille pondérée $\{(A_i; \alpha_i) \text{ avec } 1 \leqslant i \leqslant n \text{ et } \alpha_i \geqslant 0\}$

Par exemple, l'enveloppe convexe de 2 points $\{A, B\}$ est le segment $[A; B]$ et l'enveloppe convexe de 3 points $\{A, B, C\}$ non alignés est l'intérieur du triangle ABC

Démontrer que l'enveloppe convexe d'une famille $\{A_i \text{ avec } 1 \leqslant i \leqslant n\}$ a pour image par toute application affine, l'enveloppe convexe de la famille $\{f(A_i) \text{ avec } 1 \leqslant i \leqslant n\}$

17.4.2 Homothéties et translations

Exercice 28 :

Dans le plan affine $\mathcal{P}$, on considère un triangle ABC tel que A et B sont fixes et C décrit une droite (D). Quels sont les ensembles décrits par :

1. Le milieu A' du segment $[B; C]$
2. Le milieu B' du segment $[A; C]$
3. Le centre de gravité G du triangle ABC

mathinfovannes.free.fr ©

Exercice 29 :

L'exercice se place dans un plan affine $\mathcal{P}$ Un parallélogramme $ABCD$ est tel que les points A et B sont fixés et C décrit une droite (D_1). Quels sont les ensembles décrits par :

1. Le quatrième sommet D
2. Le centre du parallélogramme

Exercice 30 :

On considère le plan affine $\mathcal{P}$ muni d'un repère cartésien $\mathcal{R}\left(\left\{O, \vec{i}, \vec{j}\right\}\right)$. Soit $\vec{P}$ le plan vectoriel associé rapporté à une base $\left\{\vec{i}, \vec{j}\right\}$. On donne, dans le plan $\mathcal{P}$, 2 droites (D_1) et (D_2), d'équations respectives :

$$(D_1) : x + y - 1 = 0 \qquad (D_2) : x + y + 2 = 0$$

1. Existe-t-il des translations $T_{\vec{u}_\lambda}$ de vecteur $\vec{u}_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda \\ -\lambda \end{pmatrix}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ telles que $T_{\vec{u}_\lambda}((D_1)) = (D_2)$; même question pour $\vec{u}_\lambda = \begin{pmatrix} 2\lambda \\ 3\lambda \end{pmatrix}$
2. Soit $I \in \mathcal{P}$ tel que $I = (1, 1)$
   (a) Définir analytiquement l'homothétie $H_{I,k}$ de centre I et de rapport $k \in \mathbb{R}$
   (b) Calculer k de telle sorte que $H_{I,k}((D_1)) = (D_2)$

Exercice 31 :

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine d'espace directeur $\vec{E}$. Soient $I \in \mathcal{E}$ et $\vec{u} \in \vec{E}$. On considère l'homothétie $H_{I,k}$ de centre I et de rapport $k \neq 1$ et $k \neq 0$ ainsi que la translation $T_{\vec{u}}$

1. Démontrer que l'application $F : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ définue par : $F = T_{-\vec{u}} \circ H_{I,k} \circ T_{\vec{u}}$ est une homothétie dont on déterminera le centre et le rapport
2. Démontrer que l'application $G : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ définue par : $G = H_{I,\frac{1}{k}} \circ T_{\vec{u}} \circ H_{I,k}$ est une translation dont on déterminera le vecteur en fonction de k et $\vec{u}$

Exercice 32 :

Cet exercice peut être considéré comme le prolongement du précédent
Soit $\mathcal{E}$ un espace affine d'espace directeur $\vec{E}$. Soient I et I' 2 points de $\mathcal{E}$ **distincts**, c'est à dire tels que $I \neq I'$. Nous considérons l'homothétie $H_{I,k}$ de centre I et de rapport $k \neq 0$ et $H_{I',k'}$ l'homothétie de centre I' et de rapport $k' \neq 0$ et $kk' \neq 1$. *(On suppose $kk' \neq 1$ puisque le cas $kk' = 1$ a déjà été étudié dans l'exercice précédent)*
Déterminer la nature et les éléments catractéristiques de $H_{I',k'} \circ T_{\overrightarrow{II'}} \circ H_{I,k}$ où $T_{\overrightarrow{II'}}$ est la translation de vecteur $\overrightarrow{II'}$

Exercice 33 :

$\mathcal{P}$ est le plan affine rapporté à un repère cartésien $\mathcal{R}\left(\left\{O, \vec{i}, \vec{j}\right\}\right)$. Soient $A \in \mathcal{P}$ et $B \in \mathcal{P}$ de coordonnées $A = (1, 0)$ et $B = (-1, 0)$. Soient $k_1 \in \mathbb{R}^*$ et $k_2 \in \mathbb{R}^*$.
Pour $M \in \mathcal{P}$, nous appelons $M_1 = H_{A,k_1}(M)$ et $M_2 = H_{B,k_2}(M)$. Soit alors M' l'image de O dans la translation de vecteur $\overrightarrow{M_1M_2}$. On appelle f l'application de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ qui à M fait correspondre M'.

1. Quelle est la définition analytique de f ?
2. Discuter, en fonction des valeurs de k_1 et de k_2 de la nature de f

mathinfovannes.free.fr©

Exercice 34 :

Théorèmes de Ménélaüs et de Ceva

Pour cet exercice, nous aurons besoin d'une notion de **mesure algébrique**
Etant donnés une droite (D), un vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ de (D), 2 points $A \in (D)$ et $A \in (D)$, la mesure algébrique du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est le nombre réel $\overline{AB}$ tel que $\overrightarrow{AB} = \overline{AB}\overrightarrow{u}$

Une mesure algébrique peut donc être positive ou négative. En d'autres termes, si $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{u}$, k est la mesure algébrique du vecteur $\overrightarrow{AB}$

Dans le plan affine $\mathcal{P}$, on considère le triangle ABC. On prend trois points A', B' et C' tels que $A' \in (BC)$, $B' \in (AC)$ et $C' \in (AB)$, mais qui sont tous différents des 3 sommets du triangle ABC.

1. **Théorème de Menelaüs** : Démontrer que les points A', B' et C' sont alignés si et seulement si :
$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \times \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \times \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = 1$$
2. **Théorème de Ceva** : Démontrer que les droites (AA'), (BB') et (CC') sont concourrantes si et seulement si :
$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \times \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \times \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = -1$$

Exercice 35 :

Théorème de Pappus
On considère, dans le plan affine $\mathcal{P}$ 2 droites distinctes (D) et (D_1) sécantes en un point I.
Soient $A \in (D)$, $B \in (D)$ et $C \in (D)$. Soient aussi $A_1 \in (D_1)$, $B_1 \in (D_1)$ et $C_1 \in (D_1)$
Démontrer que si $(AB_1) \parallel (BA_1)$ et $(C_1B) \parallel (B_1C)$, alors $(AC_1) \parallel (CA_1)$

Exercice 36 :

Soit $\mathcal{P}$ un espace affine de diminsion 2 associé au $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\overrightarrow{P}$. On appelle $\mathcal{B} = \left\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right\}$ une base de $\overrightarrow{E}$ et $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ un repère cartésien de $\mathcal{E}$.

1. **Questions préliminaires**
On considère 3 points $A \in \mathcal{P}$, $B \in \mathcal{P}$ et $C \in \mathcal{P}$ où $A = (0; -1)$, $B = (-1; -2)$ et $C = (0; 1)$
   (a) Montrer que le triplet $\{A, B, C\}$ est un repère affine de $\mathcal{P}$
   (b) On considère l'application affine $f : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}$ telle que $f(A) = B$, $f(C) = C$ et $f(B) = B'$ où $B' = (-3; -4)$.
      i. Donner la définition analytique de f
      ii. Montrer que f est une bijection
2. **Partie A**
   (a) Montrer que l'ensemble des points invariants de f est une droite (D) dont on déterminera l'équation
   (b) Montrer que, pour tout point $M \in \mathcal{P}$, le vecteur $\overrightarrow{Mf(M)}$ est colinéaire à un vecteur $\overrightarrow{V} \in \overrightarrow{P}$ dont on déterminera les coordonnées dans la base $\mathcal{B}$
   (c) Soit I le projeté de M sur (D) parallèlement à $\overrightarrow{V}$. Comprer les vecteurs $\overrightarrow{If(M)}$ et $\overrightarrow{IM}$. Donner une construction géométrique de $f(M)$ connaissant $M \in \mathcal{P}$
3. **Partie B**
$\overrightarrow{f}$ est l'application linéaire associée à f
   (a) Déterminer 2 vecteurs non nuls $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{P}$ et $\overrightarrow{v} \in \overrightarrow{P}$ tels que $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{u}) = \lambda\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{v}) = \mu\overrightarrow{v}$, avec $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et $\mu \in \mathbb{R}^*$
   (b) Montrer que la famille $\mathcal{B}_1 = \{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\}$ est une base de $\overrightarrow{P}$ et donner la matrice de $\overrightarrow{f}$ dans la base $\mathcal{B}_1$
   (c) Donner la définition analytique de f dans le repère cartésien $\mathcal{R}_1(C, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ de $\mathcal{E}$.

mathinfovannes.free.fr ©