17.5 Exercices corrigés

Tous les exercices proposés dans dans le cours ne sont pas corrigés. Ceux qui m'ont paru évidents, ne sont pas corrigés.

Faire des figures..Faire des figures..Faire des figures..Faire des figures..

17.5.1 Applications affines

Exercice 1 :

Montrer que $\mathcal{H} \cap \mathcal{T} = \{\mathrm{Id}_{\mathcal{E}}\}$

Soit $f \in \mathcal{H} \cap \mathcal{T}$. Alors :

- ⋆ Nous avons $f \in \mathcal{H}$ et f admet un point invariant *(au moins, puisque nous pouvons avoir $f = \mathrm{Id}_E$)*
- ⋆ Mais nous avons aussi $f \in \mathcal{T}$, et que f admette un point invariant signifie que $f = \mathrm{Id}_E$

Nous avons donc bien $\mathcal{H} \cap \mathcal{T} = \{\mathrm{Id}_{\mathcal{E}}\}$

Exercice 2 :

Par 2 points E et F pris sur les côtés $[A;B]$ et $[C;D]$ d'un quadrilatère $ABCD$, on mène des parallèles à la diagonale $[B;D]$ qui coupent les côtés $[A;D]$ et $[C;D]$ respectivement en H et G.

1. *Si le quadrilatère $EFGH$ est un parallélogramme, démontrer que les droites (EF) et (HG) sont parallèles à (AC)*
2. *Démontrer que si les droites (EF) et (HG) sont sécantes, alors leur point de concours est sur la droite (AC)*

Nous n'allons pas suivre à la lettre les questions de l'exercice, mais en faire une résolution plus globale en réutilisant les résultats du cours. Tout d'abord, faisons un schéma :

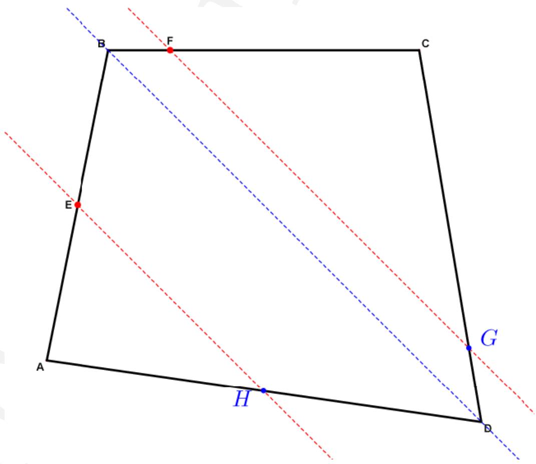

Figure 17.12 – Certes, un schéma n'est pas une démonstration, mais qu'est ce que ça aide!!

1. Pour commencer, considérons l'homothétie de centre C et de rapport λ notée $h_{C,\lambda}$ qui transforme F en B et G en D. Cette homothétie existe puisque $(FG) \parallel (BD)$ et que, d'après le théorème de Thalès, $\lambda = \dfrac{CB}{CF} = \dfrac{CD}{CG}$
2. Ensuite, considérons l'homothétie de centre A et de rapport μ notée $h_{A,\mu}$ qui transforme B en E et D en H. Cette homothétie existe puisque $(EH) \parallel (BD)$ et que, d'après le théorème de Thalès, $\lambda = \dfrac{AE}{AB} = \dfrac{AD}{AH}$
3. Maintenant, je compose ces deux homothéties en étudiant $h_{A,\mu} \circ h_{C,\lambda}$
   (a) Cette composition fait correspondre E à F et H à G, c'est à dire que nous avons :

$\star$ $h_{A,\mu} \circ h_{C,\lambda}(F) = E$ $\star$ $h_{A,\mu} \circ h_{C,\lambda}(G) = H$

(b) De 2 choses l'une : ou bien $h_{A,\mu} \circ h_{C,\lambda}$ est une translation, ou bien $h_{A,\mu} \circ h_{C,\lambda}$ est une homothétie

(c) Si $h_{A,\mu} \circ h_{C,\lambda}$ est une homothétie, c'est une homothétie de centre X et de rapport $\lambda \times \mu$ avec, d'après les résultats du cours X aligné avec A et C. Ainsi les droites (EF) et (HG) sont elles sécantes en X , où X, centre de l'homothétie et point de concours des droites est sur la droite (AC)

(d) Si $h_{A,\mu} \circ h_{C,\lambda}$ est une translation ($\lambda \times \mu = 1$), alors $\overrightarrow{FE} = \overrightarrow{GH}$ et le quadrilatère $EFGH$ est un parallélogramme. D'autre part, le vecteur $\overrightarrow{FE} = \overrightarrow{GH}$ est le vecteur de la translation lequel est colinéaire au vecteur $\overrightarrow{CA}$ *(voir le cours)*
Ainsi les droites (EF) et (HG) sont parallèles à la droite (AC)

4. <u>Quand donc avons nous $\lambda \times \mu = 1$? ?</u>
Dans ce cas, nous avons $\dfrac{CB}{CF} = \dfrac{AE}{AB} = 1$. En posant $\lambda = \dfrac{CB}{CF}$, nous avons alors
$$\frac{AE}{AB} = \frac{1}{\lambda} = \frac{CF}{CB} \iff CF = \frac{1}{\lambda} \times CB \text{ et } AE = \frac{1}{\lambda} \times AB$$
Ce qui veut dire que E et F sont positionnés sur « les mêmes proportions » sur les segments $[A;B]$ et $[C;D]$; ainsi, si $\lambda = 2$, E et F sont les milieux respectifs de $[A;B]$ et $[C;D]$

Exercice 3 :

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine et G le barycentre d'un système pondéré $\{(A,2);(B,-1);(C,1)\}$. Soit $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ l'application qui à tout $M \in \mathcal{E}$ fait correspondre le point $M' \in \mathcal{E}$ tel que :
$$\overrightarrow{GM'} = 2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$$
Quelle est la nature de f ?

Pour tout $M \in \mathcal{E}$, nous avons $\overrightarrow{MG} = \dfrac{1}{2}\left(2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right) \iff 2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MG}$
Ainsi, $\overrightarrow{GM'} = 2\overrightarrow{MG} \iff \overrightarrow{GM'} = -2\overrightarrow{GM}$
f est donc une homothétie de centre G et de rapport -2

Exercice 4 :

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine ; on considère $A \in \mathcal{E}$ et $B \in \mathcal{E}$, 2 points de $\mathcal{E}$ tels que $A \neq B$

1. *Quelles sont les conditions sur $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R}$ pour que, pour tout point $M \in \mathcal{E}$, il existe un point $M' \in \mathcal{E}$ tel que :*
$$\alpha\overrightarrow{M'A} + \beta\overrightarrow{M'B} + 2\overrightarrow{M'M} = \overrightarrow{0}$$
Tel que présenté, M' apparaît comme le barycentre du système pondéré $\{(A,\alpha);(B,\beta);(M,2)\}$, et pour que ce barycentre existe, il faut que nous ayions $\alpha + \beta + 2 \neq 0$, c'est à dire $\alpha + \beta \neq -2$

2. *La condition sur α et β étant réalisée, on désigne par $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ l'application qui à tout $M \in \mathcal{E}$ fait correspondre le point $M' \in \mathcal{E}$.*

(a) *Déterminer, suivant les valeurs α et β, l'ensemble des points invariants par f*
Soit $I \in \mathcal{E}$ un point invariant par f ; alors, $I' = f(I) = I$ et nous avons alors la relation :
$$\alpha\overrightarrow{IA} + \beta\overrightarrow{IB} + 2\overrightarrow{II} = \overrightarrow{0} \iff \alpha\overrightarrow{IA} + \beta\overrightarrow{IB} = \overrightarrow{0}$$
I apparaît alors comme le barycentre du système pondéré $\{(A,\alpha);(B,\beta)\}$ Ainsi :

- Si $\alpha+\beta\neq 0$, il n'existe qu'un seul point fixe I qui vérifie
$$\alpha\overrightarrow{IA}+\beta\overrightarrow{IB}=\overrightarrow{0}\iff\overrightarrow{AI}=\frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$$
Donc, si $\alpha+\beta\neq 0$, l'unique point invariant par f est bien déterminé
- Si $\alpha+\beta=0\iff\alpha=-\beta$, nous avons :
$$\alpha\overrightarrow{IA}-\alpha\overrightarrow{IB}=\overrightarrow{0}\iff\alpha\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{0}$$
Puisque $A\neq B$, nous avons $\overrightarrow{BA}\neq\overrightarrow{0}$, ce qui donne $\alpha=0$, et, en revenant à la définition de f, nous obtenons $M'=M$, et ce, pour tout $M\in\mathcal{E}$, et alors $f=\mathrm{Id}_{\mathcal{E}}$
Donc, s'il existe des points invariants par f, et si $\alpha+\beta=0$, alors $\alpha=0$ et $f=\mathrm{Id}_{\mathcal{E}}$

(b) *On suppose $\alpha+\beta=0$. Pour tout point $M\in\mathcal{E}$, exprimer le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{AB}$ et α*

Si $\alpha+\beta=0$, alors $\alpha=-\beta$ et nous avons alors :
$$\begin{aligned}\alpha\overrightarrow{M'A}+\beta\overrightarrow{M'B}+2\overrightarrow{M'M}=\overrightarrow{0}&\iff\alpha\left(\overrightarrow{M'A}-\overrightarrow{M'B}\right)+2\overrightarrow{M'M}=\overrightarrow{0}\\&\iff\alpha\overrightarrow{BA}+2\overrightarrow{M'M}=\overrightarrow{0}\end{aligned}$$

⋆ Si $\alpha=0$, alors $2\overrightarrow{M'M}=\overrightarrow{0}$ et $M=M'$, ce qui veut dire que $f=\mathrm{Id}_{\mathcal{E}}$
⋆ Si $\alpha\neq 0$, alors $2\overrightarrow{M'M}=-\alpha\overrightarrow{BA}\iff\overrightarrow{MM'}=\frac{\alpha}{2}\overrightarrow{BA}$.
f est alors une translation de vecteur $\frac{\alpha}{2}\overrightarrow{BA}$

(c) *On suppose $\alpha+\beta\neq 0$. Montrer que f est une homothétie dont on déterminera le centre et le rapport*

Si $\alpha+\beta\neq 0$, alors le système pondéré $\{(A,\alpha);(B,\beta)\}$ admet un barycentre I, lequel vérifie pour tout $O\in\mathcal{E}$:
$$\overrightarrow{OI}=\frac{1}{\alpha+\beta}\left(\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}\right)\iff(\alpha+\beta)\overrightarrow{OI}=\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}$$
La relation $\alpha\overrightarrow{M'A}+\beta\overrightarrow{M'B}+2\overrightarrow{M'M}=\overrightarrow{0}$ devient alors :
$$(\alpha+\beta)\overrightarrow{M'I}+2\overrightarrow{M'M}=\overrightarrow{0}$$
En « instillant » I, nous obtenons :
$$\begin{aligned}(\alpha+\beta)\overrightarrow{M'I}+2\overrightarrow{M'M}=\overrightarrow{0}&\iff(\alpha+\beta)\overrightarrow{M'I}+2\overrightarrow{M'I}+2\overrightarrow{IM}=\overrightarrow{0}\\&\iff(\alpha+\beta+2)\overrightarrow{M'I}=-2\overrightarrow{IM}\\&\iff\overrightarrow{IM'}=\frac{2}{\alpha+\beta+2}\overrightarrow{IM}\end{aligned}$$
Nous avons donc $\overrightarrow{IM'}=\frac{2}{\alpha+\beta+2}\overrightarrow{IM}$; ce qui montre que f est une homothétie de centre I et de rapport $\frac{2}{\alpha+\beta+2}$

17.5.2 Miscelleanous

Exercice 31 :

Dans le plan affine $\mathcal{P}$, on considère un triangle ABC tel que A et B sont fixes et C décrit une droite (D). Quels sont les ensembles décrits par :

1. *Le milieu A' du segment $[B;C]$*

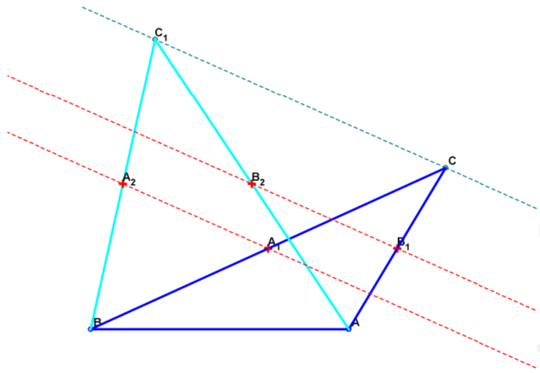

FIGURE 17.13 – Certes, un schéma n'est pas une démonstration, mais qu'est ce que ça aide!!

2. *Le milieu B' du segment $[A;C]$*
3. *Le centre de gravité G du triangle ABC*

Commençons par faire une figure Nous pourrions trouver 2 façons de répondre aux questions posées

1. Tout d'abord, en termes géométriques.
   Soient $C \in (D)$ et $C_1 \in (D)$
   - ⋆ En considérant le triangle ACC_1, nous avons $\overrightarrow{CC_1} = 2\overrightarrow{B_1B_2}$, ce qui montre que la droite (B_1B_2) est parallèle à la droite (CC_1), c'est à dire à la droite (D). Donc, l'ensemble décrit par le milieu A' du segment $[B;C]$ est une droite parallèle à (D)
   - ⋆ De la même manière, en considérant le triangle BCC_1, nous avons $\overrightarrow{CC_1} = 2\overrightarrow{A_1A_2}$, ce qui montre que la droite (A_1A_2) est parallèle à la droite (CC_1), c'est à dire à la droite (D). Donc, l'ensemble décrit par le milieu B' du segment $[A;C]$ est une droite parallèle à (D)
2. En utilisant les homothéties
   - ⋆ On considère l'homothétie de centre A et de rapport $\dfrac{1}{2}$ que nous appelons $H_{A,\frac{1}{2}}$. Pour tout point $C \in (D)$, si nous appelons $B' = H_{A,\frac{1}{2}}(C)$, nous avons $\overrightarrow{AB'} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ et B' est donc le milieu du segment $[A;C]$. L'image de la droite (D) par l'homothétie $H_{A,\frac{1}{2}}$ est une droite parallèle à (D). Donc, l'ensemble décrit par le milieu B' du segment $[A;C]$ est une droite parallèle à (D)
   - ⋆ On considère cette fois ci l'homothétie de centre B et de rapport $\dfrac{1}{2}$ que nous appelons $H_{B,\frac{1}{2}}$. Pour tout point $C \in (D)$, si nous appelons $A' = H_{B,\frac{1}{2}}(C)$, nous avons $\overrightarrow{BA'} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ et A' est donc le milieu du segment $[B;C]$. L'image de la droite (D) par l'homothétie $H_{B,\frac{1}{2}}$ est une droite parallèle à (D). Donc, l'ensemble décrit par le milieu A' du segment $[B;C]$ est une droite parallèle à (D)
3. Le lieu du centre de gravité G du triangle ABC
   On considère I le milieu du segment $[A;B]$. Si G est le centre de gravité de ABC, nous avons $\overrightarrow{IG} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{IC}$. C'est à dire que si nous considérons l'homothétie $H_{I,\frac{1}{3}}$, l'image de tout élément $C \in (D)$ est le centre de gravité G du triangle ABC. Donc, l'ensemble décrit par le centre de gravité G du triangle ABC est une droite parallèle à (D)

Exercice 32 :

L'exercice se place dans un plan affine $\mathcal{P}$. Un parallélogramme $ABCD$ est tel que les points A et B sont fixés et C décrit une droite (D_1). Quels sont les ensembles décrits par :

1. *Le quatrième sommet D*

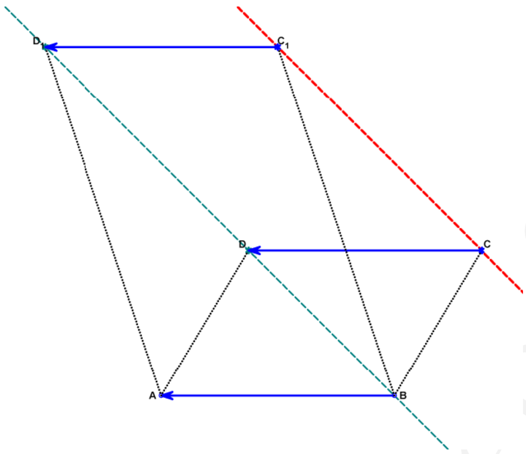

FIGURE 17.14 – Comme précédemment, commençons par faire une figure.

Nous avons forcément $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA}$, c'est à dire que $D = T_{\overrightarrow{BA}}(C)$; autrement dit, D est l'image de C. Le lieu des points D est donc l'image de la droite (D_1) par la translation $T_{\overrightarrow{BA}}(C)$; c'est donc la droite parallèle à la droite (D_1) passant par B

2. *Le centre du parallélogramme*

   Si nous appelons I le centre du parallélogramme $ABCD$, nous avons $2\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{BD}$, et donc I se trouve sur la droite parallèle à la droite (D_1) passant par B.

Exercice 34 :

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine d'espace directeur $\overrightarrow{E}$. Soient $I \in \mathcal{E}$ et $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{E}$. On considère l'homothétie $H_{I,k}$ de centre I et de rapport $k \neq 1$ et $k \neq 0$ ainsi que la translation $T_{\overrightarrow{u}}$

1. *Démontrer que l'application $F : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ définue par : $F = T_{-\overrightarrow{u}} \circ H_{I,k} \circ T_{\overrightarrow{u}}$ est une homothétie dont on déterminera le centre et le rapport*

   On peut déjà dire que si $\overrightarrow{F}$ est l'application linéaire associée à F, nous avons $\overrightarrow{F} = \mathrm{Id}_{\overrightarrow{E}} \circ h_k \circ \mathrm{Id}_{\overrightarrow{E}} = h_k$. L'endomorphisme associé $\overrightarrow{F}$ est donc une homothétie de rapport k. F est donc une homothétie de rapport k dont il faut trouver le centre.
   On appelle Ω, le point tel que $\overrightarrow{\Omega I} = \overrightarrow{u}$, c'est à dire le point tel que :

   $$\Omega = T_{-\overrightarrow{u}}(I) \Longleftrightarrow I = T_{\overrightarrow{u}}(\Omega)$$

   Alors, Ω est le point fixe de F ; en effet :

   $$F(\Omega) = T_{-\overrightarrow{u}} \circ H_{I,k} \circ T_{\overrightarrow{u}}(\Omega) = T_{-\overrightarrow{u}} \circ H_{I,k}(I) = T_{-\overrightarrow{u}}(I) = \Omega$$

   Ainsi, F est une homothétie de rapport k et de centre Ω.
   On peut donc écrire que $T_{-\overrightarrow{u}} \circ H_{I,k} \circ T_{\overrightarrow{u}} = H_{T_{-\overrightarrow{u}}(I),k}$

2. *Démontrer que l'application $G : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ définie par : $G = H_{I,\frac{1}{k}} \circ T_{\overrightarrow{u}} \circ H_{I,k}$ est une translation dont on déterminera le vecteur en fonction de k et $\overrightarrow{u}$*

   Comme tout à l'heure, si $\overrightarrow{G}$ est l'application linéaire associée à G, nous avons $\overrightarrow{G} = h_{\frac{1}{k}} \circ \mathrm{Id}_{\overrightarrow{E}} \circ h_k = \mathrm{Id}_{\overrightarrow{E}}$. L'endomorphisme associé $\overrightarrow{G}$ étant l'identité, G est donc une translation dont il faut trouver le vecteur.
   Soit $M \in \mathcal{E}$; Appelons :

   $$M_1 = H_{I,k}(M) \quad M_2 = T_{\overrightarrow{u}}(M_1) \quad M_3 = H_{I,\frac{1}{k}}(M_2)$$

Il faut montrer que le vecteur $\overrightarrow{MM_3}$ est constant.
Or, $\overrightarrow{MM_3} = \overrightarrow{IM_3} - \overrightarrow{IM}$. Et nous avons :

$$\overrightarrow{IM_3} = \frac{1}{k}\overrightarrow{IM_2} = \frac{1}{k}\left(\overrightarrow{IM_1} + \overrightarrow{M_1M_2}\right) = \frac{1}{k}\overrightarrow{IM_1} + \frac{1}{k}\overrightarrow{u}$$

D'autre part : $\overrightarrow{IM_1} = k\overrightarrow{IM}$ et donc $\frac{1}{k}\overrightarrow{IM_1} = \frac{1}{k} \times k\overrightarrow{IM} = \overrightarrow{IM}$, de telle sorte que $\overrightarrow{IM_3} = \overrightarrow{IM} + \frac{1}{k}\overrightarrow{u}$, et donc :

$$\overrightarrow{MM_3} = \overrightarrow{IM_3} - \overrightarrow{IM} = \overrightarrow{MM_3} = \overrightarrow{IM} + \frac{1}{k}\overrightarrow{u} - \overrightarrow{IM} = \frac{1}{k}\overrightarrow{u}$$

Ainsi, G est une translation de vecteur $\frac{1}{k}\overrightarrow{u}$

Allons un peu plus loin

Nous avons démontré que $\mathcal{H} \cup \mathcal{T}$, ensemble des homothéties-translations est un groupe pour la loi de composition $\circ$. $\mathcal{H}$ ensemble des homothéties de $\mathcal{E}$ est un sous-groupe de $\mathcal{H} \cup \mathcal{T}$, de même que $\mathcal{T}$, ensemble des translations. De plus, nous avons $\mathcal{H} \cap \mathcal{T} = \{\mathrm{Id}_{\mathcal{E}}\}$.
Nous venons de montrer, dans cet exercice, que $\mathcal{H}$ et $\mathcal{T}$ étaient des **sous-groupes distingués** de $\mathcal{H} \cup \mathcal{T}$

Exercice 35 :

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine d'espace directeur $\overrightarrow{E}$. Soient I et I' 2 points de $\mathcal{E}$ distincts, c'est à dire $I \neq I'$. Nous considérons l'homothétie $H_{I,k}$ de centre I et de rapport $k \neq 0$ et $H_{I',k'}$ l'homothétie de centre I' et de rapport $k' \neq 0$ et $kk' \neq 1$.
Déterminer la nature et les éléments catractéristiques de $H_{I',k'} \circ T_{\overrightarrow{II'}} \circ H_{I,k}$

Comme précédemment, nous posons $F = H_{I',k'} \circ T_{\overrightarrow{II'}} \circ H_{I,k}$.

1. L'application linéaire associée à F est $\overrightarrow{F} = \overrightarrow{H_{I',k'}} \circ \overrightarrow{T_{\overrightarrow{II'}}} \circ \overrightarrow{H_{I,k}} = h'_k \circ \mathrm{Id}_{\overrightarrow{E}} \circ h_k = k_{kk'}$. $\overrightarrow{F}$ est une homothétie vectorielle de rapport kk'
   F est donc une homothétie affine de rapport kk' donc il faut déterminer le centre Ω
2. Remarquons que nous avons $F(I) = I'$ et que nous avons donc $\overrightarrow{\Omega I'} = kk'\overrightarrow{\Omega I}$
3. Il est maintenant simple de trouver Ω :

$$\overrightarrow{\Omega I'} = kk'\overrightarrow{\Omega I} \Longleftrightarrow \overrightarrow{\Omega I} + \overrightarrow{II'} = kk'\overrightarrow{\Omega I} \Longleftrightarrow \overrightarrow{I\Omega} = \frac{1}{1-kk'}\overrightarrow{II'}$$

Exercice 36 :

$\mathcal{P}$ est le plan affine rapporté à un repère cartésien $\mathcal{R}\left(\left\{O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right\}\right)$. Soient $A \in \mathcal{P}$ et $B \in \mathcal{P}$ de coordonnées $A = (1,0)$ et $B = (-1,0)$. Soient $k_1 \in \mathbb{R}^*$ et $k_2 \in \mathbb{R}^*$.
Pour $M \in \mathcal{P}$, nous appelons $M_1 = H_{A,k_1}(M)$ et $M_2 = H_{B,k_2}(M)$. Soit alors M' l'image de O dans la translation de vecteur $\overrightarrow{M_1M_2}$. On appelle f l'application de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ qui à M fait correspondre M'.

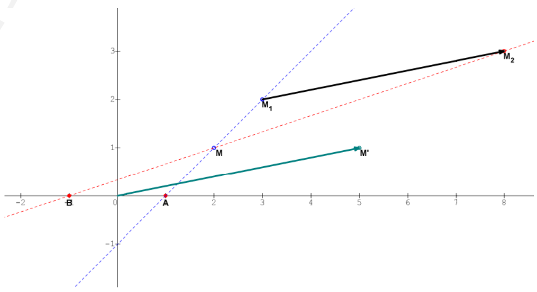

FIGURE 17.15 – Comme précédemment, commençons par faire une figure.

1. *Quelle est la définition analytique de f ?*

   Voilà une question qui ne pose pas de difficulté ; il suffit de le résoudre posément, calmement.
   Soit $M = (x, y) \in \mathcal{P}$
   - ⋆ Posons $M_1 = H_{A,k_1}(M)$ et nous appelons (x_1, y_1) les coordonnées de M_1.
     Nous avons alors $\overrightarrow{AM_1} = k_1\overrightarrow{AM}$, c'est à dire que nous avons, au niveau des coordonnées :

     $$\begin{pmatrix} x_1 - 1 \\ y_1 \end{pmatrix} = k_1 \begin{pmatrix} x - 1 \\ y \end{pmatrix} \iff \left\{ \begin{array}{rl} x_1 = & k_1 x + 1 - k_1 \\ y_1 = & k_1 y \end{array} \right.$$

   - ⋆ De la même manière, posons $M_2 = H_{B,k_2}(M)$ et nous appelons (x_2, y_2) les coordonnées de M_2.
     Nous avons alors $\overrightarrow{BM_2} = k_2\overrightarrow{BM}$, c'est à dire que nous avons, au niveau des coordonnées :

     $$\begin{pmatrix} x_2 + 1 \\ y_2 \end{pmatrix} = k_2 \begin{pmatrix} x + 1 \\ y \end{pmatrix} \iff \left\{ \begin{array}{rl} x_2 = & k_2 x + k_2 - 1 \\ y_2 = & k_2 y \end{array} \right.$$

   - ⋆ Maintenant, nous nous intéressons au vecteur $\overrightarrow{M_1M_2}$. Nous avons, à nouveau, entermes de coordonnées :

     $$\overrightarrow{M_1M_2} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (k_2 x + k_2 - 1) - (k_1 x + 1 - k_1) \\ k_2 y - k_1 y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (k_2 - k_1)\, x + (k_2 + k_1 - 2) \\ (k_2 - k_1)\, y \end{pmatrix}$$

   - ⋆ En posant $M' = (x', y')$, le point tel que $\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{M_1M_2}$, nous avons $\overrightarrow{OM'} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$
     Et nous obtenons donc, comme définition analytique de f :

     $$\left\{ \begin{array}{rl} x' = & (k_2 - k_1)\, x + (k_2 + k_1 - 2) \\ y' = & (k_2 - k_1)\, y \end{array} \right.$$

2. *Discuter, en fonction des valeurs de k_1 et de k_2 de la nature de f*

   Ce n'est pas une question si difficile. Nous allons procéder en plusieurs étapes.
   → <u>f admet-elle des points invariants ?</u>
   Si f admet un point invariant I, alors $f(I) = I$, et les coordonnées (x, y) de I vérifient :

   $$\left\{ \begin{array}{rl} x = & (k_2 - k_1)\, x + (k_2 + k_1 - 2) \\ y = & (k_2 - k_1)\, y \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rl} (1 - k_2 + k_1)\, x = & (k_2 + k_1 - 2) \\ (1 - k_2 + k_1)\, y = & 0 \end{array} \right.$$

   → <u>Supposons $1 - k_2 + k_1 \neq 0 \iff k_2 - k_1 \neq 1$</u>
   Alors $y = 0$ et $x = \dfrac{k_1 + k_2 - 2}{k_1 - k_2 + 1}$ et le point $\Omega = \left(\dfrac{k_1 + k_2 - 2}{k_1 - k_2 + 1}, 0\right)$ est le seul point invariant de f
   ⊠ Nous allons démontrer que f est une homothétie de centre Ω et de rapport $k_2 - k_1$

   $$\begin{aligned} \overrightarrow{\Omega M'} = \begin{pmatrix} x' - \dfrac{k_1 + k_2 - 2}{k_1 - k_2 + 1} \\ y' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} (k_2 - k_1)\, x + (k_2 + k_1 - 2) - \dfrac{k_1 + k_2 - 2}{k_1 - k_2 + 1} \\ (k_2 - k_1)\, y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (k_2 - k_1)\, x + \dfrac{(k_2 + k_1 - 2)(k_1 - k_2 + 1) - (k_1 + k_2 - 2)}{k_1 - k_2 + 1} \\ (k_2 - k_1)\, y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (k_2 - k_1)\, x - \dfrac{(k_2 - k_1)(k_1 + k_2 - 2)}{k_1 - k_2 + 1} \\ (k_2 - k_1)\, y \end{pmatrix} \\ &= (k_2 - k_1) \begin{pmatrix} x - \dfrac{k_1 + k_2 - 2}{k_1 - k_2 + 1} \\ y \end{pmatrix} \\ &= (k_2 - k_1)\, \overrightarrow{\Omega M} \end{aligned}$$

⊠ Si $k_1 = k_2$, alors, $k_1 - k_2 = 0$ et f est la fonction constante qui à tout M fait correspondre Ω. Comme $k_1 = k_2$, nous avons $\Omega = (2k_1 - 2, 0)$. On retrouve ce résultat en utilisant la définition analytique.

→ Nous supposons maintenant que $1 - k_2 + k_1 = 0 \Longleftrightarrow k_2 - k_1 = 1 \Longleftrightarrow k_2 = k_1 + 1$

Alors :

⊠ L'équation $(1 - k_2 + k_1)\,y = 0$ devient $0y = 0$ et $y \in \mathbb{R}$

⊠ L'équation $(1 - k_2 + k_1)\,x = (k_2 + k_1 - 2)$ devient $0x = (k_2 + k_1 - 2) \Longleftrightarrow 0x = 2k_1 - 1$

⊠ Ainsi, si $2k_1 - 1 \neq 0$, il n'y a pas de point invariant. La définition analytique de f devient :

$$\left\{\begin{array}{ll} x' = & x + (2k_1 - 1) \\ y' = & y \end{array}\right.$$

f est donc une translation de vecteur $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 2k_1 - 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

⊠ Maintenant, si $2k_1 - 1 = 0$, c'est à dire $k_1 = \dfrac{1}{2}$ et $k_2 = \dfrac{3}{2}$, l'équation $(1 - k_2 + k_1)\,x = (k_2 + k_1 - 2)$ devient $0x = 0$ et $x \in \mathbb{R}$. La définition analytique de f devient :

$$\left\{\begin{array}{ll} x' = & x \\ y' = & y \end{array}\right.$$

f est donc l'application identique

En résumé :

⇉ Si $k_1 = \dfrac{1}{2}$ et $k_2 = \dfrac{3}{2}$ alors $f = \mathrm{Id}_{\mathcal{P}}$

⇉ Si $k_2 = k_1 + 1$ et $k_1 \neq \dfrac{1}{2}$ alors f est une translation de vecteur $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 2k_1 - 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

⇉ Si $k_1 = k_2$, f est une application constante

⇉ Dans les autres cas, f est une homothétie de rapport $k_2 - k_1$ et de centre $\Omega = \left(\dfrac{k_1 + k_2 - 2}{k_1 - k_2 + 1}, 0\right)$

Exercice 37 :

Théorèmes de Ménélaus et de Ceva

Dans le plan affine $\mathcal{P}$, on considère le triangle ABC. On prend trois points A', B' et C' tels que $A' \in (BC)$, $B' \in (AC)$ et $C' \in (AB)$, mais qui sont tous différents des 3 sommets du triangle ABC.

1. *Théorème de Menelaüs : Démontrer que les points A', B' et C' sont alignés si et seulement si :*

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \times \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \times \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = 1$$

(a) **Aucun sommet A,B ou C n'est sur une droite $(A'B')$, $(A'C')$ ou $(C'B')$**

Nous allons démontrer que le point A n'appartient pas à la droite $(C'B')$; toutes les autres démonstrations sont semblables. *(Il y a quand même 9 démonstrations de ce type !!)*

On considère le repère cartésien $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$, et nous posons :

$$\overrightarrow{AC'} = \alpha\overrightarrow{AB} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AB'} = \beta\overrightarrow{AC}$$

Avec $\alpha \neq 0$, $\alpha \neq 1$, $\beta \neq 0$ et $\beta \neq 1$ puisque les points A', B' (et C' sont différents des sommets du triangle ABC

Si le point $A \in (C'B')$, alors les vecteurs $\overrightarrow{AC'}$ et $\overrightarrow{B'C'}$ sont colinéaires, ce qui traduit en termes de déterminant : $\det\left(\overrightarrow{AC'}, \overrightarrow{B'C'}\right) = 0$; si ce déterminant est non nul, alors les vecteurs $\overrightarrow{AC'}$ et $\overrightarrow{B'C'}$ sont linéairement indépendants et le point A n'est pas aligné avec les points B' et C', autrement dit $A \notin (C'B')$

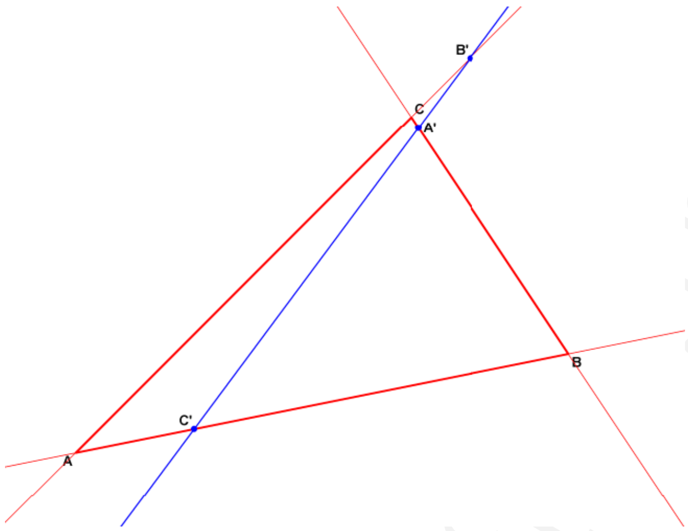

FIGURE 17.16 – La figure du théorème de Menelaüs

Nous avons $\overrightarrow{AC'} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{B'C'} = \begin{pmatrix} \alpha \\ -\beta \end{pmatrix}$ et donc $\det\left(\overrightarrow{AC'}, \overrightarrow{B'C'}\right) = \begin{vmatrix} \alpha & \alpha \\ 0 & -\beta \end{vmatrix} = -\alpha \times \beta$.

Comme $\alpha \neq 0$ et $\beta \neq 0$, nous avons $\alpha \times \beta \neq 0$, c'est à dire $\det\left(\overrightarrow{AC'}, \overrightarrow{B'C'}\right) \neq 0$ et donc $A \notin (C'B')$

(b) **Considérons, maintenant, 3 homothéties particulières**

- ⋆ Soit $H(C', k_1)$, l'homothétie de centre C' et de rapport k_1 telle que $H(C', k_1)(A) = B$. Comme $C' \neq A$ et $C' \neq B$, nous avons $k_1 \neq 0$

  Nous avons alors $\overrightarrow{C'B} = k_1 \overrightarrow{C'A}$. Si $\overrightarrow{u}$ est le vecteur directeur de la droite (AB), nous avons $\overrightarrow{C'B} = \overline{C'B}\,\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{C'A} = \overline{C'A}\,\overrightarrow{u}$, de telle sorte $\overline{C'B}\,\overrightarrow{u} = k_1 \overline{C'A}\,\overrightarrow{u}$, et donc

$$\overline{C'B} = k_1 \overline{C'A} \Longleftrightarrow k_1 = \frac{\overline{C'B}}{\overline{C'A}}$$

- ⋆ De même, soit $H(A', k_2)$ $(k_2 \neq 0)$, l'homothétie de centre A' et de rapport k_2 telle que $H(A', k_2)(B) = C$

  Nous avons à nouveau :

$$k_2 = \frac{\overline{A'C}}{\overline{A'B}}$$

- ⋆ Et, pour terminer, soit $H(B', k_3)$ $(k_3 \neq 0)$, l'homothétie de centre B' et de rapport k_3 telle que $H(B', k_3)(C) = A$

  Nous avons à nouveau :

$$k_3 = \frac{\overline{B'A}}{\overline{B'C}}$$

- ⋆ Considérons $F = H(B', k_3) \circ H(A', k_2) \circ H(C', k_1)$

  F est une homothétie de rapport $k_3 \times k_2 \times k_1 = \dfrac{\overline{B'A}}{\overline{B'C}} \times \dfrac{\overline{A'C}}{\overline{A'B}} \times \dfrac{\overline{C'B}}{\overline{C'A}}$.

  D'autre part :

$$\begin{aligned} F(A) = {} & H(B', k_3) \circ H(A', k_2) \circ H(C', k_1)(A) \\ = {} & H(B', k_3) \circ H(A', k_2)(B) \\ = {} & H(B', k_3)(C) \\ = {} & A \end{aligned}$$

  F est donc une homothétie de centre A et de rapport $k_3 \times k_2 \times k_1$ ou bien est une translation laissant le point A fixe, c'est à dire que F est l'identité de $\mathcal{P}$: $F = \mathrm{Id}_{\mathcal{P}}$

(c) **Supposons, maintenant, les points A', B' et C' alignés**
Nous appelons $\varphi = H(A', k_2) \circ H(C', k_1)$.
Alors, φ est une homothétie de centre Ω et de rapport $k_1 \times k_2$ telle que $\Omega \in (B'C')$.
Maintenant, $F = H(B', k_3) \circ \varphi$ est une homothétie de centre A tel que $A \in (\Omega A')$.
Comme les points A', B' et C' sont alignés, la droite $(\Omega A')$ est aussi la droite $(A'B')$ ou $(C'B')$ ou $(A'C')$, et donc $A \in (A'B')$, ce qui est impossible.
Donc, F n'est pas une homothétie, mais $F = \mathrm{Id}_{\mathcal{P}}$, ce qui veut dire que $k_3 \times k_2 \times k_1 = 1$, et donc :

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \times \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \times \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = 1$$

(d) **Réciproquement, supposons $\dfrac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \times \dfrac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \times \dfrac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = 1$**
Comme A est un point fixe de F, nous avons $F = \mathrm{Id}_{\mathcal{P}}$ et donc

$$H(A', k_2) \circ H(C', k_1) = [H(B', k_3)]^{-1} = H\left(B', \frac{1}{k_3}\right)$$

Le centre de l'homothétie $H(A', k_2) \circ H(C', k_1)$ étant sur la droite $(A'C')$, nous en déduisons que $B' \in (A'C')$ et donc que les points A', B' et C' sont alignés

2. *Théorème de Ceva : Démontrer que les droites (AA'), (BB') et (CC') sont concourrantes si et seulement si :*

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \times \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \times \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = -1$$

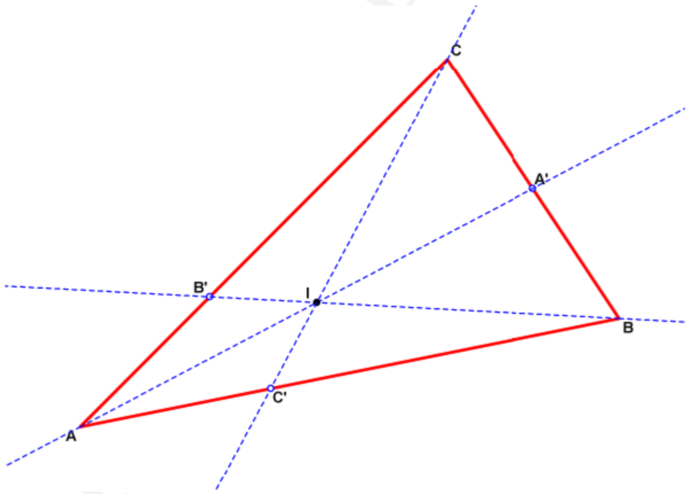

FIGURE 17.17 – La figure du théorème de Ceva

Nous démontrons le théorème de Ceva comme conséquence du théorème de Ménélaüs. Nous appelons I le point de concours des droites (AA'), (BB') et (CC').

(a) **Considérons le triangle ABA'**
Nous avons alors, $C' \in (AB)$, $I \in (AA')$ et $C \in (BA')$. En appliquant le théorème de Ménélaüs au triangle ABA', nous avons :

$$\frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} \times \frac{\overline{CB}}{\overline{CA'}} \times \frac{\overline{IA'}}{\overline{IA}} = 1$$

(b) **Considérons le triangle CAA'**

Nous avons alors, $B' \in (AC)$, $I \in (AA')$ et $B \in (CA')$. En appliquant le théorème de Ménélaüs au triangle CAA', nous avons :

$$\frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \times \frac{\overline{IA}}{\overline{IA'}} \times \frac{\overline{BA'}}{\overline{BC}} = 1$$

(c) **On multiplie maintenant termes à termes les expressions trouvées.**

Nous avons alors :
$$\frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} \times \frac{\overline{CB}}{\overline{CA'}} \times \frac{\overline{IA'}}{\overline{IA}} \times \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \times \frac{\overline{IA}}{\overline{IA'}} \times \frac{\overline{BA'}}{\overline{BC}} = 1$$

D'où, en simplifiant et réordonnant, nous obtenons :

$$\frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} \times \frac{\overline{BA'}}{\overline{CA'}} \times \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} = -1$$

Ce que nous voulions

Exercice 38 :

Théorème de Pappus
On considère, dans le plan affine $\mathcal{P}$ 2 droites distinctes (D) et (D_1) sécantes en un point I.
Soient $A \in (D)$, $B \in (D)$ et $C \in (D)$. Soient aussi $A_1 \in (D_1)$, $B_1 \in (D_1)$ et $C_1 \in (D_1)$
Démontrer que si $(AB_1) \parallel (BA_1)$ et $(C_1B) \parallel (B_1C)$, alors $(AC_1) \parallel (CA_1)$

Cet exercice est l'application directe de 17.1.10

- ⋆ Comme, par hypothèses, $(AB_1) \parallel (BA_1)$, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AB_1} = \lambda \overrightarrow{BA_1}$, et, d'après 17.1.10, il existe une unique homothétie $H(I,k)$ telle que $H(I,k)(A) = B$ et $H(I,k)(B_1) = A_1$
- ⋆ De même, comme $(C_1B) \parallel (B_1C)$, il existe une unique homothétie $H(I,k_1)$ telle que $H(I,k_1)(C_1) = B_1$ et $H(I,k_1)(B) = C$
- ⋆ Considérons maintenant l'homothétie $H(I,k_1) \circ H(I,k) = H(I,k) \circ H(I,k_1) = H(I,kk_1)$ puisque les homothéties de même centre commutent ; alors :
  → $H(I,k_1) \circ H(I,k)(A) = H(I,k_1)(B) = C$
  → $H(I,k) \circ H(I,k_1)(C_1) = H(I,k_1)(B_1) = A_1$
  Ainsi, l'homothétie $H(I,kk_1)$ transforme la droite (AC_1) en une droite (CA_1) qui sont donc parallèles